Нетеровость по уравнениям для предикатных алгебраических систем

Бучинский И. М., buchvan@mail.ru

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева

Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики,
г. Омск, 28 сентября 2023 г.

Предварительные сведения

Язык $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}\}$, где каждый $P_i^{(n_i)}$ – предикатный символ размерности n_i, будем называть *предикатным языком*. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебраическая система над языком $\mathcal{L}$. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов A: $\mathcal{L}_\mathcal{A} = \mathcal{L} \cup A$, будем называть предикатным языком с константами из A.

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Предварительные сведения

Язык $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_k^{(n_k)}\}$, где каждый $P_i^{(n_i)}$ – предикатный символ размерности n_i, будем называть *предикатным языком*. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебраическая система над языком $\mathcal{L}$. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов A: $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L} \cup A$, будем называть предикатным языком с константами из A.

Для языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, либо переменной.

Предварительные сведения

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением уравнения* $s(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ от n переменных $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \models s(\mathbf{a})$.

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением системы уравнений* $S(\mathbf{X})$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{X})$.

Множество всех решений системы уравнений $S(\mathbf{X})$ называется *алгебраическим множеством* над $\mathcal{A}$ и обозначается через $V_\mathcal{A}(S(\mathbf{X}))$.

Предварительные сведения

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением уравнения* $s(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ от n переменных $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \models s(\mathbf{a})$.

Точка $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^n$ называется *решением системы уравнений* $S(\mathbf{X})$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если $\mathbf{a}$ является решением каждого уравнения системы $S(\mathbf{X})$. Множество всех решений системы уравнений $S(\mathbf{X})$ называется *алгебраическим множеством* над $\mathcal{A}$ и обозначается через $V_{\mathcal{A}}(S(\mathbf{X}))$.

Предварительные сведения

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{X})$ и $S_2(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}$ называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если их множества решений совпадают.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(\mathbf{X})$ от n переменных $\mathbf{X}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{X}) \subseteq S(\mathbf{X})$.

Предварительные сведения

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{X})$ и $S_2(\mathbf{X})$ языка $\mathcal{L}$ называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если их множества решений совпадают.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного n любая система уравнений $S(\mathbf{X})$ от n переменных $\mathbf{X}$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(\mathbf{X}) \subseteq S(\mathbf{X})$.

Предварительные сведения

С достаточно обширным списком работ и теоретической базой по универсальной алгебраической геометрии можно ознакомиться, например, в монографии Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников «Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами» (2016, http://iitam.omsk.net.ru/~remesl/articles/monography.pdf).

Предварительные сведения

Теорема 2.5.21 (объединяющая теорема для $\mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка* $\mathtt{L}$. *Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка* $\mathtt{L}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$;

(2) $\mathrm{Th}_\exists(\mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{A})$;

(3) $\Delta_\mathcal{C} \subseteq \Delta_\mathcal{A}$, *то есть любая диаграммная формула языка* $\mathtt{L}$, *выполнимая в* $\mathcal{C}$, *выполнима в* $\mathcal{A}$;

(4) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую ультрастепень алгебраической системы* $\mathcal{A}$;

(5) $\mathcal{C}$ *изоморфна предельной алгебраической системе над* $\mathcal{A}$;

(6) $\mathcal{C}$ *является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории* $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$ *языка* $\mathtt{L}$;

(7) $\mathcal{C}$ *дискриминируется алгебраической системой* $\mathcal{A}$;

(8) $\mathcal{C}$ *является координатной алгеброй некоторого неприводимого алгебраического множества над* $\mathcal{A}$, *определённого системой уравнений языка* $\mathtt{L}$.

Предварительные сведения

Теорема 2.5.22 (объединяющая теорема для $\mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$). *Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебраическая система языка* $\mathtt{L}$. *Тогда для любой конечно порождённой алгебраической системы $\mathcal{C}$ языка* $\mathtt{L}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{C} \in \mathbf{Qvar}(\mathcal{A})$, *то есть* $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{C}) \supseteq \mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$;

(2) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую фильтрованную степень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(3) $\mathcal{C}$ *подпрямо вкладывается в* **конечное** *прямое произведение предельных алгебраических систем над $\mathcal{A}$;*

(4) $\mathcal{C}$ *изоморфна предельной алгебраической системе над некоторой конечной прямой степенью $\mathcal{A}^m$;*

(5) $\mathcal{C}$ *является алгебраической системой, определённой полным атомарным типом теории* $\mathrm{Th}_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$ *языка* $\mathtt{L}$;

(6) $\mathcal{C} \in \mathbf{Pvar}(\mathcal{A})$;

(7) $\mathcal{C}$ *вкладывается в некоторую прямую степень алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(8) $\mathcal{C}$ *подпрямо вкладывается в прямое произведение некоторых подсистем алгебраической системы $\mathcal{A}$;*

(9) $\mathcal{C}$ *аппроксимируется алгебраической системой $\mathcal{A}$;*

(10) $\mathcal{C}$ *является координатной алгеброй некоторого алгебраического множества над $\mathcal{A}$, определённого системой уравнений языка* $\mathtt{L}$.

Предварительные сведения

Основными преимуществами нетеровых по уравнениям алгебраических систем являются:

1. возможность изучения только конечных систем уравнений;
2. справедливость объединяющих теорем 2.5.21, 2.5.22, дающих описание (неприводимых) координатных алгебр несколькими разными способами.
3. представимость произвольного непустого алгебраического множества в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств.

Предварительные сведения

Известны следующие примеры нетеровых по уравнениям алгебраических систем:

- любое нетерово коммутативное кольцо,
- любая конечная алгебраическая система,
- любой простой локально конечный граф,
- любая гиперболическая группа без кручения (Z. Sela, 2013),
- любая жесткая группа, в частности свободная разрешимая группа (Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, 2007, 2009),
- любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли (Э. Ю. Даниярова, 2007).

Предварительные сведения

Известны следующие примеры нетеровых по уравнениям алгебраических систем:

- любое нетерово коммутативное кольцо,
- любая конечная алгебраическая система,
- любой простой локально конечный граф,
- любая гиперболическая группа без кручения (Z. Sela, 2013),
- любая жесткая группа, в частности свободная разрешимая группа (Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, 2007, 2009),
- любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли (Э. Ю. Даниярова, 2007).

Предварительные сведения

Известны следующие примеры нетеровых по уравнениям алгебраических систем:

- любое нетерово коммутативное кольцо,
- любая конечная алгебраическая система,
- любой простой локально конечный граф,
- любая гиперболическая группа без кручения (Z. Sela, 2013),
- любая жесткая группа, в частности свободная разрешимая группа (Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, 2007, 2009),
- любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли (Э. Ю. Даниярова, 2007).

Предварительные сведения

Известны следующие примеры нетеровых по уравнениям алгебраических систем:

- любое нетерово коммутативное кольцо,
- любая конечная алгебраическая система,
- любой простой локально конечный граф,
- любая гиперболическая группа без кручения (Z. Sela, 2013),
- любая жесткая группа, в частности свободная разрешимая группа (Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, 2007, 2009),
- любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли (Э. Ю. Даниярова, 2007).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Примеры алгебраических систем, не являющихся нетеровыми по уравнениям:

- сплетение неабелевой группы и бесконечной группы (G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, 1997),
- минимаксные алгебраические системы (Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, 2008),
- бесконечная прямая степень неабелевой группы или полугруппы (M. Shahryari, A. Shevlyakov, 2017),
- примеры бесконечно порожденных нильпотентных групп (A. Myasnikov, V. Remeslennikov, 2000).

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Предварительные сведения

Алгебраическая геометрия над конкретными предикатными алгебраическими системами ранее уже исследовалась.

- А. В. Ильев, В. Н. Ремесленников «Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений» (2017)
- А. В. Ильев, В. П. Ильев «On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids» (2019)
- А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык «Criterion of equationally Notherian property for posets» (2018)
- Б., А. В. Трейер «О графах, не являющихся нетеровыми по уравнениям» (2023)
- Б., А. В. Трейер «On first order definability of equationally noetherian graphs» (2021)

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Частично упорядоченным множеством (или частичным порядком) называется алгебраическая система $\mathcal{P} = \langle P, \leq^{(2)} \rangle$, где $\leq^{(2)}$ – бинарное отношение порядка, удовлетворяющее следующим 3 аксиомам:

1. $\forall p \in P \;\; p \leq p$,
2. $\forall p_1, p_2 \in P \;\; p_1 \leq p_2 \wedge p_2 \leq p_1 \to p_1 = p_2$,
3. $\forall p_1, p_2, p_3 \in P \;\; p_1 \leq p_2 \wedge p_2 \leq p_3 \to p_1 \leq p_3$.

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Пусть A – некоторое подмножество частичного порядка $\mathcal{P}$ и пусть $A^{\uparrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ a \leq x\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ x \leq a\}$.

Верхним базовым конусом A называется пара $(A, A^{\uparrow})$.

Верхний базовый конус A называется *конечно порожденным*, если существует такое конечное подмножество $B \subseteq A$, что $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$. В противном случае, если не существует такого конечного подмножества, будем говорить, что верхний базовый конус A *бесконечно порожден.*

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

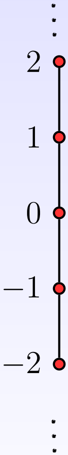
Пусть A – некоторое подмножество частичного порядка $\mathcal{P}$ и пусть $A^{\uparrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ a \leq x\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \in \mathcal{P} \mid \forall a \in A\ x \leq a\}$.
Верхним базовым конусом A называется пара $(A, A^{\uparrow})$.
Верхний базовый конус A называется *конечно порожденным*, если существует такое конечное подмножество $B \subseteq A$, что $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$. В противном случае, если не существует такого конечного подмножества, будем говорить, что верхний базовый конус A *бесконечно порожден*.

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков

Теорема 1 (А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык)

Частичный порядок $\mathcal{P}$ нетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда верхний и нижний конусы любого его подмножества конечно порождены.

Нетеровость по уравнениям для частичных порядков



Частичный порядок $\mathbb{Z}$

Нетеровость по уравнениям для графов

Неориентированным графом называется пара множеств (V, E), где V — непустое множество вершин, E — множество неупорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. Простым графом называют граф без кратных ребер и петель.

Язык $\mathcal{L}_{graph} = \{E^{(2)}\}$ назовем *языком графов.* Произвольный граф можно рассматривать как алгебраическую систему над $\mathcal{L}_{graph}$. Расширение языка $\mathcal{L}_{graph}$ множеством вершин графа Γ: $\mathcal{L}_{graph,\Gamma} = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком графов с константами из Γ.

Нетеровость по уравнениям для графов

Неориентированным графом называется пара множеств (V, E), где V — непустое множество вершин, E — множество неупорядоченных пар элементов из V, называемых ребрами. Простым графом называют граф без кратных ребер и петель.

Язык $\mathcal{L}_{graph} = \{E^{(2)}\}$ назовем *языком графов*. Произвольный граф можно рассматривать как алгебраическую систему над $\mathcal{L}_{graph}$. Расширение языка $\mathcal{L}_{graph}$ множеством вершин графа Γ: $\mathcal{L}_{graph,\Gamma} = \mathcal{L} \cup V(\Gamma)$, назовем языком графов с константами из Γ.

Предварительные сведения

В статье М. В. Котова «Несколько замечаний о нётеровости по уравнениям» (2013), сформулирован следующий критерий о том, когда произвольная алгебраическая система не является нетеровой по уравнениям:

Лемма 1

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ не является нётеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $(\mathbf{a}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{a}_i \in A^n$, и последовательность уравнений $(s_i(\mathbf{X}))_{i \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ языка $\mathcal{L}$, для которых выполнено следующее условие:

$$\mathcal{A} \not\models s_i(\mathbf{a}_i) \text{ для всех } i \in \mathbb{N} \text{ и } \mathcal{A} \models s_j(\mathbf{a}_i) \text{ для всех } j < i.$$

Предварительные сведения

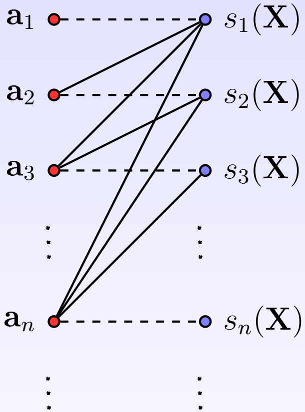


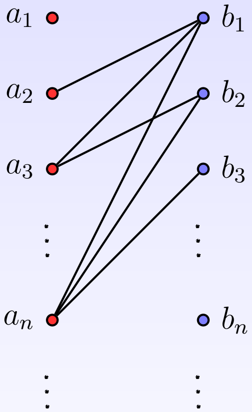
Иллюстрация к лемме 1

Нетеровость по уравнениям для графов

Определение

Граф Γ будем называть совершенно ненетеровым, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ такую, что каждая из вершин a_i соединена ребрами со всеми вершинами b_j при $j < i$, но не соединена ребром с вершиной b_i.

Нетеровость по уравнениям для графов



Базисный ненетеров граф

Нетеровость по уравнениям для графов

Граф, содержащий счетную клику K в качестве индуцированного подграфа, для краткости, будем называть *надкликой*.

Теорема 2 (Б., А. В. Трейер)

Справедливы следующие утверждения:

1. простой граф ненетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненетеров, либо является надкликой;
2. граф с петлями ненетеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненетеров.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Будем говорить, что свойство P графов *выразимо логикой первого порядка*, если существует набор замкнутых формул первого порядка, которые истинны для всех графов, обладающих свойством P, и ложны для всех остальных графов.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Техника определения выразимо ли какое-либо свойство логикой первого порядка основывается, как правило, на поиске двух элементарно эквивалентных алгебраических систем, которые различаются этим свойством. Для того, чтобы понять, являются ли они элементарно эквивалентными, можно использовать так называемую *игру Эренфойхта-Фраиссе*, подробное описание которой можно найти, например, в работе Н. К. Верещагин, А. Шень «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления».

Дадим определение этой игры в контексте графов.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Техника определения выразимо ли какое-либо свойство логикой первого порядка основывается, как правило, на поиске двух элементарно эквивалентных алгебраических систем, которые различаются этим свойством. Для того, чтобы понять, являются ли они элементарно эквивалентными, можно использовать так называемую *игру Эренфойхта-Фраиссе*, подробное описание которой можно найти, например, в работе Н. К. Верещагин, А. Шень «Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления».

Дадим определение этой игры в контексте графов.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

В игре Эренфойхта-Фраиссе участвуют два игрока, называемые Новатором (**Н**) и Консерватором (**К**). Игра определяется выбранной парой графов. Графы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда **К** имеет выигрышную стратегию.

В начале игры **Н** выбирает натуральное число k. Далее они ходят по очереди, начиная с **Н**. Каждый из игроков делает k ходов, после чего определяется победитель.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

В игре Эренфойхта-Фраиссе участвуют два игрока, называемые Новатором (**Н**) и Консерватором (**К**). Игра определяется выбранной парой графов. Графы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда **К** имеет выигрышную стратегию.

В начале игры **Н** выбирает натуральное число k. Далее они ходят по очереди, начиная с **Н**. Каждый из игроков делает k ходов, после чего определяется победитель.

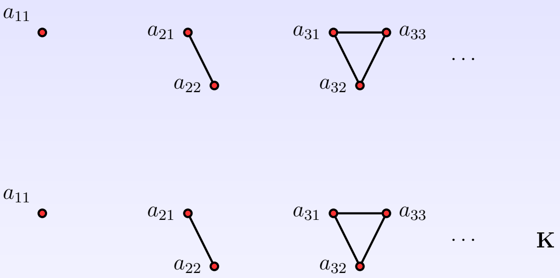
Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

На i-м ходу **H** выбирает элемент в одном из графов и помечает его числом i. В ответ **K** выбирает некоторый элемент из другого графа и также помечает его числом i. После k ходов игра заканчивается. При этом в каждом графе k элементов оказываются помеченными числами от 1 до k. Обозначим эти элементы через $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (для первого графа; элемент a_i имеет пометку i) и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ (для второго). Элементы a_i и b_i будем называть соответствующими друг другу.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Если найдется формула языка графов, различающая помеченные элементы первого и второго графов, то есть которая является истинной на некотором наборе помеченных элементов одного графа, но ложной на соответствующих элементах другого, то выигрывает Новатор, в противном случае — Консерватор.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов



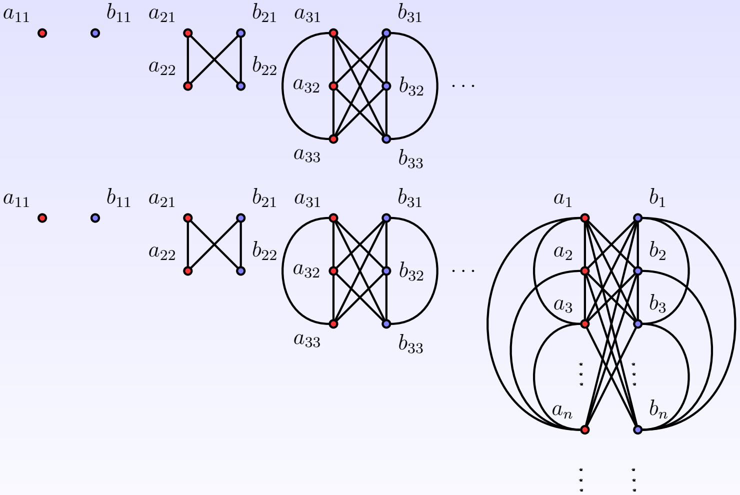
Игра Эренфойхта-Фраиссе на кликах

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов

Теорема 3 (Б., А. В. Трейер)

Свойство нетеровости для простых графов невыразимо логикой первого порядка.

Выразимость нетеровости по уравнениям для графов



Игра Эренфойхта-Фраиссе на булевых графах

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Уравнения, состоящие только из констант либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Для языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ произвольное уравнение имеет один из следующих видов:

1. $P_i(w_1, \ldots, w_{n_i})$, где $i \in \{1, \ldots, k\}$, и для всех $j = \overline{1, n_i}$ терм w_j является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной;
2. $w_1 = w_2$, где каждый терм w_1, w_2 является либо константой языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, либо переменной.

Уравнения, состоящие только из констант либо всегда ложны, либо всегда истинны. Системы таких уравнений можно заменить одним заведомо ложным или истинным уравнением. Поэтому мы не будем рассматривать системы уравнений, содержащие бесконечное количество уравнений, состоящих только из констант.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Замечание 1

Любая алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, P^{(1)} \rangle$ над языком с одним унарным предикатным символом нетерова по уравнениям.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Говорят, что предикат $Q^{(n)}$ *совпадает с предикатом* $P^{(n)}$ *с точностью до перестановки компонент*, если для $(1, \ldots, n)$ существует такая перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathcal{A} \models P(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{A} \models Q(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}).$$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ — алгебраическая система над предикатным языком с конечным числом предикатных символов $\mathcal{L} = \{P_1^{(n_1)}, \ldots, P_m^{(n_m)}\}$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Лемма 2

Пусть $\mathcal{A}$ не является нетеровой по уравнениям в языке с константами $\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \mathcal{L} \cup A$. Тогда существуют такой предикат $Q^{(n_k)}$, совпадающий с точностью до перестановки компонент с предикатом $P_k^{(n_k)}$ языка $\mathcal{L}$, такое число $0 < p < n_k$ (число переменных), и такая последовательность элементов $\{(a_1^i, \ldots, a_p^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, что для системы уравнений $S = (Q(x_1, \ldots, x_p, b_1^i, \ldots, b_t^i))_{i \in \mathbb{N}}$, где $t = n_k - p$, и последовательности $\{(a_1^i, \ldots, a_p^i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, выполнены условия *леммы 1*, то есть S не является нетеровой по уравнениям.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Теорема 4

Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ над предикатным языком $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ с константами из A не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда существует такое обеднение языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ до $\mathcal{L}'_\mathcal{A}$ с одним предикатным симоволом и константами из A, что алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, \mathcal{L}'_\mathcal{A} \rangle$ не является нетеровой по уравнениям.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Будем говорить, что алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, P^{(2)} \rangle$ *содержит счетную простую клику*, если существует такая последовательность элементов $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq A$, что для всех i: $\mathcal{A} \not\models P(a_i, a_i)$, и для всех различных i и j: $\mathcal{A} \models P(a_i, a_j)$.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Определение

Пусть $P^{(n)}$ – произвольный n-местный предикат, $I \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$, $|I| = k$, $0 < k < n$. Предикат $P'^{(k)}$ будем называть *проекцией предиката* P *на множество компонент* I, если существует такой набор $p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n-k}} \in A$ $(j_1, \ldots, j_{n-k} \notin I)$, что для любых $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in A$ $(i_1, \ldots, i_k \in I)$

$$\mathcal{A} \models P'(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \iff \mathcal{A} \models P(\bar{c}),$$

где $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_i = a_i$, если $i \in I$, и $c_i = p_i$ иначе, для любых $i = \overline{1, n}$.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Определение

Для n-местного предиката P и точного разбиения $I = \bigsqcup_{j=1}^{m} I_j$ множества $\{1, \ldots, n\}$ определим так называемый *фактор-предикат* ${}^{P}/{}_{I}$ местности $m \leq n$ следующим образом:

$$\mathcal{A} \models {}^{P}/{}_{I}(a_1, \ldots, a_m) \iff \mathcal{A} \models P(b_1, \ldots, b_n),$$

где для любого подмножества I_k разбиения I и для любого $i \in I_k$, $b_i = a_k$.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Определение

Будем говорить, что алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L}_\mathcal{A} \rangle$ содержит *P-совершенно ненетерову подсистему*, где P — n-местный предикат языка $\mathcal{L}_\mathcal{A}$, если существуют такая алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, Q^{(n_i)} \rangle$, где $Q^{(n_i)}$ совпадает с $P_i^{(n_i)}$ с точностью до перестановки компонент, и такие последовательности $\{(a_1^j, \dots, a_p^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{(b_1^j, \dots, b_t^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов A, что $p + t = n_i$ и для всех j

$$\mathcal{A}' \not\models Q(a_1^j, \dots, a_p^j, b_1^j, \dots, b_t^j) \text{ и}$$

$$\mathcal{A}' \models Q(a_1^q, \dots, a_p^q, b_1^j, \dots, b_t^j) \text{ для всех } q > j.$$

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Теорема 5 (Б., Котов, Трейер)

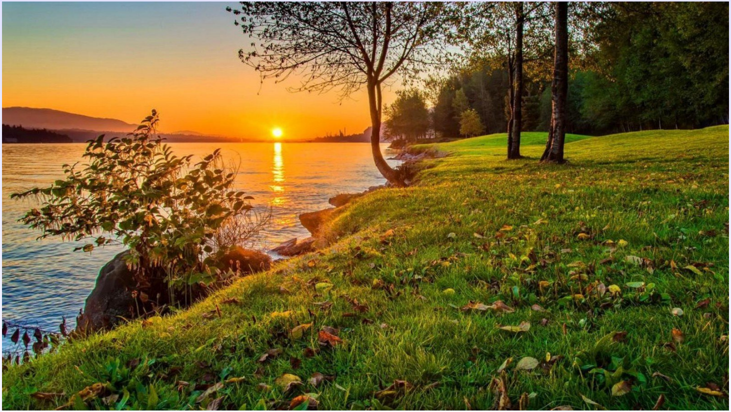
Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, P^{(n)} \rangle$ над языком с одним предикатным символом $P^{(n)}$ не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда существуют такая проекция $P'^{(k)}$ предиката $P^{(n)}$ и такое точное разбиение I множества $\{1, \ldots, k\}$, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, {}^{P'}/_{I} \rangle$ содержит совершенно ненетерову подсистему;
- $|I| = 2$ и алгебраическая система $\mathcal{A}' = \langle A, {}^{P'}/_{I} \rangle$ содержит счетную простую клику.

Нетеровость произвольных предикатных алгебраических систем

Нетрудно заметить, что всякую алгебраическую систему над языком с одним предикатным символом $P^{(n)}$ можно рассматривать как гиперграф (или, в случае $n = 2$, как граф), в котором множеством ребер является в точности предикат $P^{(n)}$. При этом алгебраическую систему над произвольным предикатным языком бывает удобно иллюстрировать в виде гиперграфа, в котором ребра раскрашены в цвет, соответствующий некоторому предикату из языка и только ему.

Спасибо за внимание



Вопросы?