Логическая геометрия и интерпретируемость

Эвелина Даниярова

Международная конференция
«Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики»,
27 – 30 сентября, г. Омск

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск

План

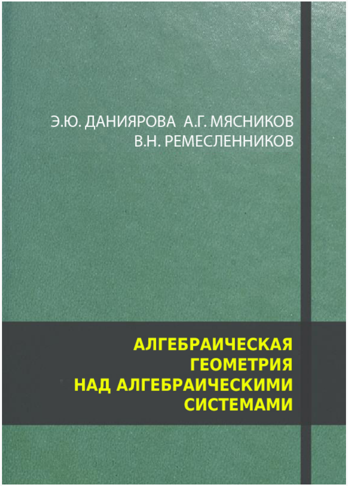
1. Что такое логическая геометрия?
2. Что такое интерпретируемость?
3. Как они связаны?

Универсальная алгебраическая геометрия,

или

алгебраическая геометрия над алгебраическими системами,

Б. И. Плоткин, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников



Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами, Новосибирск: Из-во СО РАН, 2016, 243 с.

Две идеи Б. И. Плоткина

1. Переход от универсальной алгебраической геометрии к алгебраической геометрии в логике первого порядка
2. Сравнение алгебраических систем по их алгебраическим или логическим геометриям

Пусть $\mathbb{A} = \langle A; L \rangle$ — алгебраическая система, $L = \{f, \dots, R, \dots, c \dots\}$.

- $At(X)$ — множество атомарных формул языка L от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $t_1 = t_2$, $R(t_1, \dots, t_m)$ — атомарные формулы
- атомарные формулы — это уравнения
- $S \subseteq At(X)$ — система уравнений
- $V(S) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathbb{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\ \forall \varphi \in S\}$ — алгебраическое множество
- Атомарная формула $\psi \in At(X)$ — это следствие системы S над $\mathbb{A}$, если $\mathbb{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$ для всех $(a_1, \dots, a_n) \in V(S)$

ВОПРОС (Б. И. Плоткин)

Когда две алгебраические системы имеют одинаковые алгебраические геометрии?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Б. И. Плоткин)

Алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L называются алебро-геометрически эквивалентными, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{At}(\mathrm{X})$ всякое уравнение $\psi \in \mathrm{At}(\mathrm{X})$ является следствием S над $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда оно является следствием S над $\mathbb{B}$.

ТЕОРЕМА (Б. И. Плоткин)

Если алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L алгебро-геометрически эквивалентны, то их категории алгебраических множеств $\mathcal{AS}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{AS}(\mathbb{B})$ изоморфны.

- Объекты $\mathcal{AS}(\mathbb{A})$ — алгебраические множества
- Морфизмы $\mathcal{AS}(\mathbb{A})$ — термальные отображения

Логическая геометрия,

или

алгебраическая геометрия в логике первого порядка,

Б. И. Плоткин

Переход к логической геометрии

- В алгебраической геометрии уравнения — это атомарные формулы языка L
- В логической геометрии уравнения — это произвольные формулы языка L
- Системы уравнений $S \subseteq F(X)$, где $F(X)$ — все формулы логики первого порядка языка L от свободных переменных X
- Логические множества = алгебраические множества в логике первого порядка
- Следствия системы уравнений

Логико-геометрическая эквивалентность

ВОПРОС (Б. И. Плоткин)

Когда две алгебраические системы имеют одинаковые логические геометрии?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Б. И. Плоткин)

Алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L называются *логико-геометрически эквивалентными*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{F}(\mathrm{X})$ всякое уравнение $\psi \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$ является следствием S над $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда оно является следствием S над $\mathbb{B}$.

Изотипность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Б. И. Плоткин)

Алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L называются изотипными, если в них реализуются одни и те же полные типы языка L.

ТЕОРЕМА (Б. И. Плоткин)

Алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L изотипны тогда и только тогда, когда они логико-геометрически эквивалентны.

Логико-геометрическая эквивалентность и категории

ТЕОРЕМА (Б. И. Плоткин)

Если алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L логико-геометрически эквивалентны, то их категории логических множеств $\mathcal{LS}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{LS}(\mathbb{B})$ изоморфны.

- Объекты $\mathcal{LS}(\mathbb{A})$ — логические множества
- Морфизмы $\mathcal{LS}(\mathbb{A})$ — термальные отображения

Интерпретируемость и биинтерпретируемость

Интерпретируемость одной алгебраической системы в другой

Алгебраическая система $\mathbb{A} = \langle A; L(\mathbb{A}) \rangle$ интерпретируема в алгебраической системе $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B}) \rangle$, если

1) для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует определимое подмножество $A^* \subseteq B^n$,
2) на A^* задано определимое отношение эквивалентности $\sim$,
3) на фактор-множестве $A^*/\sim$ заданы интерпретации символов языка $L(\mathbb{A})$, прообразы графиков каковых определимы в $\mathbb{B}$,
4) алгебраическая система $\mathbb{A}^* = \langle A^*/\sim; L(\mathbb{A}) \rangle$ изоморфна $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}^* \simeq \mathbb{A}.$$

Примеры

Кольца $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ — все друг в друге интерпретируются.

Пример с матрицами

Группа $\mathrm{GL_n(k)}$ интерпретируема в своём поле k:

$$\mathbb{A} = \langle \mathrm{GL_n(k)};\ \cdot\ ,^{-1}, \mathrm{e}\rangle,$$

$$\mathbb{B} = \langle \mathrm{k}; +, -, \cdot, 0, 1\rangle.$$

Действительно, для $\mathrm{n} = 2$ возьмём $\mathrm{A}^* \subset \mathrm{k}^4$:

$$\mathrm{A}^* = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}) \in \mathrm{k}^4 | \ \mathrm{ad} - \mathrm{cb} \neq 0\}.$$

На A^* интерпретируются символы языка $\mathrm{L}(\mathbb{A})$:

$$(\mathrm{a_1, b_1, c_1, d_1}) \cdot (\mathrm{a_2, b_2, c_2, d_2}) =$$
$$= (\mathrm{a_1a_2 + b_1c_2, a_1b_2 + b_1d_2, c_1a_2 + d_1c_2, c_1b_2 + d_1d_2}),$$

$$(\mathrm{a, b, c, d})^{-1} = (\mathrm{d}/\Delta, -\mathrm{b}/\Delta, -\mathrm{c}/\Delta, \mathrm{a}/\Delta),$$

$$\mathrm{e} = (1, 0, 0, 1).$$

Если

- $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ интерпретируется друг в друге,
$$\mathbb{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B} \overset{\Delta}{\rightsquigarrow} \mathbb{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B} \quad \text{или} \quad \mathbb{A} \underset{\Delta}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbb{B},$$
- и существуют такие $(\Gamma, \bar{\mathrm{p}}, \mu_\Gamma)$ и $(\Delta, \bar{\mathrm{q}}, \mu_\Delta)$,
- что $\mu_\Gamma \circ \mu_\Delta$ и $\mu_\Delta \circ \mu_\Gamma$ определимы в $\mathbb{A}$ и в $\mathbb{B}$ соответственно,

то $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ сильно биинтерпретируются.

Логические категории и интерпретации

Логические геометрии при биинтерпретации

ТЕОРЕМА (Б. И. Плоткин)

Если алгебраические системы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ языка L логико-геометрически эквивалентны, то их категории логических множеств $\mathcal{LS}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{LS}(\mathbb{B})$ изоморфны.

ВОПРОС (А. Г. Мясников)

Если алгебраические системы $\mathbb{A} = \langle \mathrm{A}; \mathrm{L}(\mathbb{A}) \rangle$ и $\mathbb{B} = \langle \mathrm{B}; \mathrm{L}(\mathbb{B}) \rangle$ биинтерпретируемы, будут ли их категории логических множеств $\mathcal{LS}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{LS}(\mathbb{B})$ эквивалентными?

Пусть $\mathbb{A} = \langle \mathrm{A}; \mathrm{L}(\mathbb{A}) \rangle$ — алгебраическая система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Множество $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{A}^{\mathrm{m}}$ назовём логическим над $\mathbb{A}$, если существуют такие

- конечные множества X переменных и $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{A}$ параметров,
- система уравнений $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{X})$, что
- $\mathrm{Y} = \mathrm{S}(\mathbb{A})$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Все определимые множества над $\mathbb{A}$ являются логическими:

$$\mathrm{Y} = \varphi(\mathbb{A}).$$

Проективные логические множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отношение эквивалентности $\sim_Y$ на логическом множестве $Y \subseteq A^m$ назовём формульным, если оно задаётся формулой $E(\bar{y}, \bar{y}')$ языка $L(\mathbb{A}) \cup A$, относительно которой множество Y замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Множество $Y/\sim_Y$ назовём проективным логическим множеством над $\mathbb{A}$. Если Y — определимое множество, то $Y/\sim_Y$ — проективное определимое множество.

Категория проективных логических множеств

- Категория $\mathcal{PLS}(\mathbb{A})$
- Объекты $\mathcal{PLS}(\mathbb{A})$ — проективные логические множества над $\mathbb{A}$
- Морфизмы $\mathcal{PLS}(\mathbb{A})$ — формульные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Отображение $\mathrm{G}\colon \mathrm{Y}/{\sim_{\mathrm{Y}}} \to \mathrm{Z}/{\sim_{\mathrm{Z}}}$ между проективными логическими множествами назовём формульным, если оно задаётся такой формулой $\gamma(\bar{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{z}})$ языка $\mathrm{L}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{A}$, что

$$\mathbb{A} \models \gamma(\bar{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{z}}) \text{ и } \bar{\mathrm{y}} \in \mathrm{Y} \longrightarrow \bar{\mathrm{z}} \in \mathrm{Z}.$$

ТЕОРЕМА

Пусть алгебраические системы $\mathbb{A} = \langle \mathrm{A}; \mathrm{L}(\mathbb{A}) \rangle$ и $\mathbb{B} = \langle \mathrm{B}; \mathrm{L}(\mathbb{B}) \rangle$ сильно биинтерпретируемы. Тогда категории эквивалентны:

$$\mathcal{PLS}(\mathbb{A}) \simeq \mathcal{PLS}(\mathbb{B}),$$

$$\mathcal{PDS}(\mathbb{A}) \simeq \mathcal{PDS}(\mathbb{B}).$$

С Днём рождения, любимый Владимир Никанорович!