Централизаторная размерность и универсальная эквивалентность обобщённых групп Баумслага-Солитера

Дудкин Ф.А.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Омск
27 сентября 2023

определение *GBS* групп

Конечно порожденная группа G называется обобщенной группой Баумслага–Солитера (*GBS* группой) если G действует на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер бесконечные циклические.

Тогда, по теореме Басса-Серра, группа G изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группе некоторого графа групп $\mathbb{A}$, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

определение GBS групп

Конечно порожденная группа G называется обобщенной группой Баумслага–Солитера (GBS группой) если G действует на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер бесконечные циклические.

Тогда, по теореме Басса-Серра, группа G изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группе некоторого графа групп $\mathbb{A}$, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Граф с метками

Поэтому GBS группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф),

$\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A.

Граф с метками

Поэтому *GBS* группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф),

$\lambda \colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A.

Граф с метками

Поэтому GBS группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф),

$\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A.

Фундаментальная группа графа с метками

Фундаментальная группа графа с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, обозначается $\pi_1(\mathbb{A})$ и задается порождающими и определяющими соотношениями. Обозначим через $\bar{A}$ граф полученный из A склеиванием ребер e и $\bar{e}$. Выберем максимальное поддерево T графа $\bar{A}$.

Порождающее множество:
1. v для всех $v \in V(T)$,
2. t для всех $t \in E(\bar{A} \setminus T)$.

Определяющие соотношения:
1. $u^{\lambda(e)} = v^{\lambda(\bar{e})}$ для всех $e = (u, v) \in E(T)$,
2. $t^{-1} u^{\lambda(t)} t = v^{\lambda(\bar{t})}$ для всех $t = (u, v) \in E(\bar{A} \setminus T)$.

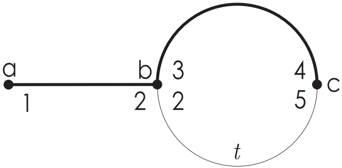
Фундаментальная группа графа с метками

Фундаментальная группа графа с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, обозначается $\pi_1(\mathbb{A})$ и задается порождающими и определяющими соотношениями. Обозначим через $\bar{A}$ граф полученный из A склеиванием ребер e и $\bar{e}$. Выберем максимальное поддерево T графа $\bar{A}$.

Порождающее множество:
1. v для всех $v \in V(T)$,
2. t для всех $t \in E(\bar{A} \setminus T)$.

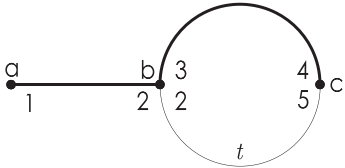
Определяющие соотношения:
1. $u^{\lambda(e)} = v^{\lambda(\bar{e})}$ для всех $e = (u, v) \in E(T)$,
2. $t^{-1} u^{\lambda(t)} t = v^{\lambda(\bar{t})}$ для всех $t = (u, v) \in E(\bar{A} \setminus T)$.

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b, c, t \mid a = b^2, b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5\rangle \cong$$
$$\langle b, c, t \mid b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5\rangle$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b, c, t \mid a = b^2, b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5\rangle \cong$$

$$\langle b, c, t \mid b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5\rangle$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

Свободные произведения циклических групп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ с объединяемыми подгруппами $\langle a^m \rangle$ и $\langle b^n \rangle$. Если m и n взаимно просты, то соответствующая GBS группа

$$T(m, n) = \pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$$

является группой торического узла.

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

Свободные произведения циклических групп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ с объединяемыми подгруппами $\langle a^m \rangle$ и $\langle b^n \rangle$. Если m и n взаимно просты, то соответствующая GBS группа

$$T(m, n) = \pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$$

является группой торического узла.

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

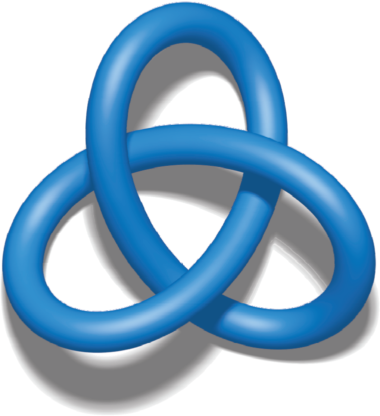


Рис.: Трилистник – торический узел $\mathcal{T}(2,3)$.

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

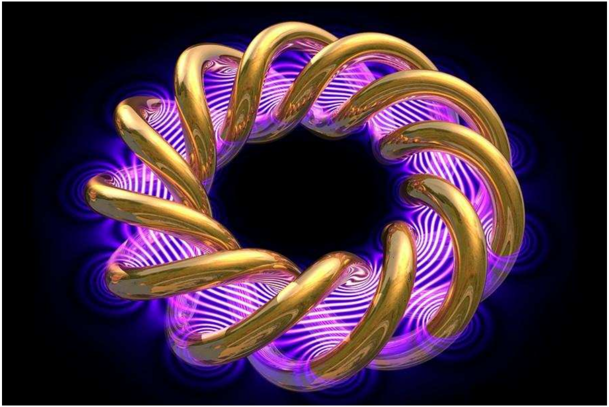
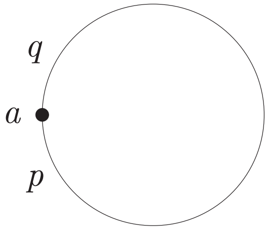


Рис.: Торический узел $\mathcal{T}(3, 11)$.

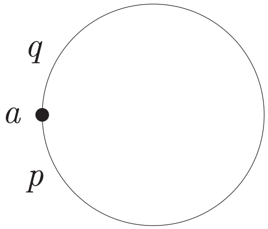
Фундаментальная группа графа с метками, примеры



Группы Баумслага-Солитера

$$\pi_1(\mathbb{A}) = BS(p, q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle.$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



Группы Баумслага-Солитера

$$\pi_1(\mathbb{A}) = BS(p, q) = \langle a, t \mid t^{-1} a^p t = a^q \rangle.$$

Группы Баумслага–Солитера

Группы Баумслага–Солитера

$$BS(m,n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \rangle, m, n \neq 0$$

являются HNN-расширением циклической группы $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$

относительно изоморфизма

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{Z} = \langle a^m \rangle & \to & \mathbb{Z} = \langle a^n \rangle, \\ & & a^m & \mapsto & a^n. \end{array}$$

Группы Баумслага–Солитера

Группы Баумслага–Солитера

$$BS(m,n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \rangle, m, n \neq 0$$

являются HNN-расширением циклической группы $\mathbb{Z} = \langle a \rangle$

относительно изоморфизма

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathbb{Z} = \langle a^m \rangle & \to & \mathbb{Z} = \langle a^n \rangle, \\ & & a^m & \mapsto & a^n. \end{array}$$

Группы Баумслага–Солитера

Группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм $G \to G$ является автоморфизмом.

В 1968 году Г. Баумслаг и Д. Солитер построили первый пример нехопфовой группы с одним соотношением.

Если $m \perp n$, $m, n \notin \{0, 1, -1\}$, то группа $BS(m, n)$ нехопфова.

Группы Баумслага–Солитера

Группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм $G \to G$ является автоморфизмом.

В 1968 году Г. Баумслаг и Д. Солитер построили первый пример нехопфовой группы с одним соотношением.

Если $m \perp n$, $m, n \notin \{0, 1, -1\}$, то группа $BS(m, n)$ нехопфова.

Группы Баумслага–Солитера

Группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм $G \to G$ является автоморфизмом.

В 1968 году Г. Баумслаг и Д. Солитер построили первый пример нехопфовой группы с одним соотношением.

Если $m \perp n$, $m, n \notin \{0, 1, -1\}$, то группа $BS(m, n)$ нехопфова.

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Заметим, что φ — эпиморфизм. Действительно, $t \in Im\varphi$ и

$$a = a^3a^{-2} = t^{-1}a^2ta^{-2} = \varphi([t, a^{-1}]) \in Im\varphi.$$

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Заметим, что φ — эпиморфизм. Действительно, $t \in Im\varphi$ и

$$a = a^3a^{-2} = t^{-1}a^2ta^{-2} = \varphi([t, a^{-1}]) \in Im\varphi.$$

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Заметим, что φ — эпиморфизм. Действительно, $t \in Im\varphi$ и

$$a = a^3a^{-2} = t^{-1}a^2ta^{-2} = \varphi([t, a^{-1}]) \in Im\varphi.$$

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Кроме того,

$$\varphi\colon [t^{-1}at, a] \mapsto [t^{-1}a^2t, a^2] = [a^3, a^2] = 1.$$

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Кроме того,

$$\varphi\colon [t^{-1}at, a] \mapsto [t^{-1}a^2t, a^2] = [a^3, a^2] = 1.$$

Группы Баумслага–Солитера

Покажем, что $G = BS(2,3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$ нехопфова.

Определим гомоморфизм

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & G & \to & G, \\ & & a & \mapsto & a^2, \\ & & t & \mapsto & t. \end{array}$$

Кроме того,

$$\varphi\colon [t^{-1}at, a] \mapsto [t^{-1}a^2t, a^2] = [a^3, a^2] = 1.$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

GBS группы, и в особенности, группы Баумслага-Солитера, дают принципиальные примеры групп с определенными свойствами:

не хопфовы

не гиперболические

не финитно аппроксимируемые

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

GBS группы, и в особенности, группы Баумслага-Солитера, дают принципиальные примеры групп с определенными свойствами:

не хопфовы

не гиперболические

не финитно аппроксимируемые

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

GBS группы, и в особенности, группы Баумслага-Солитера, дают принципиальные примеры групп с определенными свойствами:

не хопфовы

не гиперболические

не финитно аппроксимируемые

Фундаментальная группа графа с метками, примеры

GBS группы, и в особенности, группы Баумслага-Солитера, дают принципиальные примеры групп с определенными свойствами:

не хопфовы

не гиперболические

не финитно аппроксимируемые

Исследователи

Изучением действий и геометрических свойств *GBS* групп занимались:

Д. Робинсон, Д. Дегрис, Н. Петросян, Дж. Гандини, С. Мейнерт, Х. Рупинг, Н. Браунло, А. Манди, Д. Паск, Дж. Спилберг, А. Томас, А. Дэльгадо, М. Тимм, К. Гийбо, М. Моран, К. Тирель, К. Шрив, Ф. Фурнье-Фачио.

Исследователи

Изучением действий и геометрических свойств *GBS* групп занимались:

Д. Робинсон, Д. Дегрис, Н. Петросян, Дж. Гандини, С. Мейнерт, Х. Рупинг, Н. Браунло, А. Манди, Д. Паск, Дж. Спилберг, А. Томас, А. Дэльгадо, М. Тимм, К. Гийбо, М. Моран, К. Тирель, К. Шрив, Ф. Фурнье-Фачио.

Исследователи

Структурные и комбинаторные свойства *GBS* групп исследовали:

Ж. Левитт, А. Дэльгадо, Д. Робинсон, М. Тимм, С. Мейнерт, Дж. Баттон, П. Крофоллер.

Исследователи

Структурные и комбинаторные свойства *GBS* групп исследовали:

Ж. Левитт, А. Дэльгадо, Д. Робинсон, М. Тимм, С. Мейнерт, Дж. Баттон, П. Крофоллер.

Исследователи

Алгоритмическими проблемами для *GBS* групп занимались:

Б. Бикер, М. Форестер, М. Клэй, Ж. Левитт, К. Вайт.

Исследователи

Алгоритмическими проблемами для *GBS* групп занимались:

Б. Бикер, М. Форестер, М. Клэй, Ж. Левитт, К. Вайт.

Эллиптический элемент

Будем называть элемент GBS группы эллиптическим, если он сопряжен с элементом из $\langle a \rangle$, для некоторой $a \in V(A)$.

Модулярный гомоморфизм

Определим модулярный гомоморфизм $\Delta\colon G \to \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in G$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$, тогда для некоторых целых m и n, не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае, полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$.

Модулярный гомоморфизм

$$T(m,n) = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle,$$

$$\Delta(T(m,n)) = \{1\},$$

$$BS(m,n) = \langle a, t \mid t^{-1} a^m t = a^n \rangle,$$

$$\Delta(BS(m,n)) = \left\langle \frac{m}{n} \right\rangle.$$

Модулярный гомоморфизм

$$T(m,n) = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle,$$
$$\Delta(T(m,n)) = \{1\},$$

$$BS(m,n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \rangle,$$
$$\Delta(BS(m,n)) = \left\langle \frac{m}{n} \right\rangle.$$

Централизаторная размерность

Пусть G – некоторая группа и M – некоторое её подмножество. Обозначим через $C(M)$ централизатор множества M в группе G

$$C(M) = \left\{ g \in G \mid g^{-1} m g = m, \text{ для всех } m \in M \right\}.$$

Предположим, что в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов $C_0 > C_1 > \cdots > C_d$ длины d, т.е. содержащая ровно d знаков включения, но не существует такой цепочки длины $d+1$. Тогда централизаторная размерность $cdim(G)$ равна d. Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$.

Централизаторная размерность

Пусть G – некоторая группа и M – некоторое её подмножество. Обозначим через $C(M)$ централизатор множества M в группе G

$$C(M) = \left\{g \in G \mid g^{-1}mg = m, \text{ для всех } m \in M\right\}.$$

Предположим, что в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов $C_0 > C_1 > \cdots > C_d$ длины d, т.е. содержащая ровно d знаков включения, но не существует такой цепочки длины $d+1$. Тогда централизаторная размерность $cdim(G)$ равна d. Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$.

Централизаторная размерность GBS групп

Замечание. (ФД, 2016) *Пусть G – обобщенная группа Баумслага–Солитера, а p и q – взаимно простые целые числа, не равные $0, 1, -1$. Если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то централизаторная размерность группы G бесконечна.*

Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$$

$$G = C(a^2) > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle = Z(G)$$

$$cdim(G) = 2$$

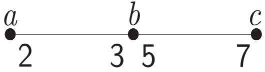
Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$$

$$G = C(a^2) > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle = Z(G)$$

$$cdim(G) = 2$$

Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры

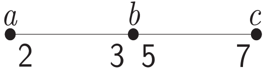


$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3, b^5 = c^7 \rangle$$

$$G = C(a^{10}) > C(a^2) = \langle a, b \rangle > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle >$$

$$> C(a, b, c) = \langle a^{10} \rangle = Z(G), cdim(G) = 4$$

Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры

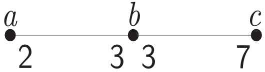


$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3, b^5 = c^7 \rangle$$

$$G = C(a^{10}) > C(a^2) = \langle a, b \rangle > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle >$$

$$> C(a, b, c) = \langle a^{10} \rangle = Z(G), cdim(G) = 4$$

Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры

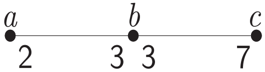


$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3, b^3 = c^7 \rangle$$

$$G = C(a^2) > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle = Z(G)$$

$$cdim(G) = 2$$

Централизаторная размерность *GBS* групп, примеры



$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3, b^3 = c^7 \rangle$$

$$G = C(a^2) > C(a) = \langle a \rangle > C(a, b) = \langle a^2 \rangle = Z(G)$$

$$cdim(G) = 2$$

Z-максимальные поддеревья

Пусть *GBS* группа G задана деревом с метками $\mathbb{A}$. Если T поддерево A, то $Z(\pi_1(\mathbb{T})) \simeq \langle g \rangle$ циклический для подходящего вершинного элемента $g \in G$.

Обозначим через T_g максимальное поддерево A такое, что

$$Z(\pi_1(\mathbb{T}_g)) = \langle g \rangle.$$

Всякое такое поддерево будем называть Z-максимальным.

Z-максимальные поддеревья

Пусть GBS группа G задана деревом с метками $\mathbb{A}$. Если T поддерево A, то $Z(\pi_1(\mathbb{T})) \simeq \langle g \rangle$ циклический для подходящего вершинного элемента $g \in G$.

Обозначим через T_g максимальное поддерево A такое, что

$$Z(\pi_1(\mathbb{T}_g)) = \langle g \rangle.$$

Всякое такое поддерево будем называть Z-максимальным.

Централизаторы в *GBS* группах

Утверждение. (ФД, 2018, Леммы 8–19)
Пусть GBS группа G представлена деревом с метками. Тогда централизаторы наборов элементов в группе G возможны трех типов

$$v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot v,\ T - Z\text{-максимальное поддерево}, \tag{1}$$

$$w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot w, \tag{2}$$

$$u^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{S})) \cdot u,\ S - Z\text{-максимальное поддерево}, \tag{3}$$

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть GBS группа G представлена редуцированным деревом с метками $\mathbb{A}$, тогда*

1. $cdim(G) \leqslant 2 \cdot |E(A)|$, *число* $cdim(G)$ *чётное;*

2. *Для любого чётного числа r от 2 до* $2 \cdot n$ *найдется редуцированное дерево с метками* $\mathbb{B}$ *на n ребрах такое, что* $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = r$.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть GBS группа G представлена редуцированным деревом с метками $\mathbb{A}$, тогда*

1. $cdim(G) \leqslant 2 \cdot |E(A)|$, число $cdim(G)$ чётное;

2. Для любого чётного числа r от 2 до $2 \cdot n$ найдется редуцированное дерево с метками $\mathbb{B}$ на n ребрах такое, что $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = r$.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть GBS группа G представлена редуцированным* *деревом* *с метками* $\mathbb{A}$, *тогда*

1. $cdim(G) \leqslant 2 \cdot |E(A)|$, *число* $cdim(G)$ *чётное;*

2. Для любого чётного числа r *от 2 до* $2 \cdot n$ *найдется редуцированное дерево с метками* $\mathbb{B}$ *на* n *ребрах такое, что* $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = r$.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Если *GBS* группа G представлена деревом с метками, то всякая её максимальная цепочка централизаторов имеет вид

$$(1) \ > \ \dots \ > \ (1) \ > \ (2) \ > \ (3) \ > \ \dots \ > \ (3),$$

либо

$$(1) \ > \ \dots \ > \ (1) = (3) \ > \ \dots \ > \ (3)$$

и соответствует цепочке вложенных Z-максимальных поддеревьев.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Утверждение. (ФД, 2018) *Пусть G – GBS группа и* $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. *Если найдется вершинный элемент a, $t \in G$ and $k \geqslant 2$ такие, что $t^{-1} \cdot a^k \cdot t = a^{k \cdot n}$ и для всякого $|r| < k$ слово $t^{-1} \cdot a^r \cdot t$ несократимо в G, то $cdim(G) = \infty$.*

Централизаторная размерность GBS групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть G – GBS группа и* $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. *Если $G \ncong BS(1, n)$, то $cdim(G) = \infty$.*
Централизаторная размерность $BS(1, n)$ равна 2.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть G – GBS группа и $\Delta(G) = \{1\}$. Если M конечное подмножество G, то $C_G(M)$ может быть одного из трех типов:*

$$u^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_a))) \cdot u,$$

$$v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{B}_b) \cdot v,$$

$$w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w,$$

для подходящих $u, v, w, r \in G$ и Z-максимальных подграфов B_a, B_b и B_c.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть неабелева GBS группа G задана графом с метками* $\mathbb{A}$. *Если* $\Delta(G) = \{1\}$, *тогда* $2 \leqslant cdim(G) \leqslant 2 \cdot |E(A)|$ *и* $cdim(G)$ *чётна. Для любого чётного* $2 \leqslant k \leqslant 2 \cdot n$ *существует такой граф с метками* $\mathbb{B}$ *с* n *ребрами, что* $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ *и* $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{1\}$.

Централизаторная размерность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2018) *Пусть неабелева GBS группа G задана графом с метками $\mathbb{A}$. Если $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, тогда $2 \leqslant cdim(G) \leqslant 2 \cdot |E(A)| + 2$ и $cdim(G)$ чётна. Для любого чётного $2 \leqslant k \leqslant 2 \cdot n + 2$ существует такой граф с метками $\mathbb{B}$ с n ребрами, что $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ и $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{\pm 1\}$.*

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *деревья с метками и соответствующие GBS группы* $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $H = \pi_1(\mathbb{B})$ *неабелевы. Тогда группы* G *и* H *универсально (экзистенциально) эквивалентны тогда и только тогда, когда* G *вкладывается в* H *и* H *вкладывается в* G.

$$\Phi_{\mathbb{A}} = (\exists x_1, \ldots, x_n) \left[\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i^{\mu_{ij}} = x_j^{\mu_{ji}} \right) \bigwedge \bigwedge \left(\bigwedge_{i \neq j} \bigwedge_{1 \leqslant s < \mu_{ij}} \bigwedge_{1 \leqslant r < r_{ij}(s)} x_i^s x_j^r \neq x_j^r x_i^s \right) \right]$$

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *деревья с метками и соответствующие GBS группы* $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $H = \pi_1(\mathbb{B})$ *неабелевы. Тогда группы* G *и* H *универсально (экзистенциально) эквивалентны тогда и только тогда, когда* G *вкладывается в* H *и* H *вкладывается в* G.

$$\Phi_{\mathbb{A}} = (\exists x_1, \ldots, x_n) \left[\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i^{\mu_{ij}} = x_j^{\mu_{ji}} \right) \bigwedge \right.$$

$$\left. \bigwedge \left(\bigwedge_{i \neq j} \bigwedge_{1 \leqslant s < \mu_{ij}} \bigwedge_{1 \leqslant r < r_{ij}(s)} x_i^s x_j^r \neq x_j^r x_i^s \right) \right]$$

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Эта формула выполняется на вершинных порождающих группы $G = \pi_1(\mathbb{A})$. Если $H \equiv_\exists G$, то в H есть элементы $x_1, \ldots, x_n$ на которых эта формула верна.

Формула постороена так, что цепочка строго возрастающих централизаторов вида

$$C_G(a_i) \ < \ C_G(a_i^{m_1}) \ < \ \ldots \ < \ C_G(a_i^{m_{k_i}})$$

всегда переходит в цепочку строго возрастающих централизаторов в H

$$C_H(x_i) \ < \ C_H(x_i^{m_1}) \ < \ \ldots \ < \ C_H(x_i^{m_{k_i}}).$$

Отсюда вытекает, что $x_1, \ldots, x_n$ эллиптические элементы.

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Эта формула выполняется на вершинных порождающих группы $G = \pi_1(\mathbb{A})$. Если $H \equiv_\exists G$, то в H есть элементы $x_1, \ldots, x_n$ на которых эта формула верна.

Формула постороена так, что цепочка строго возрастающих централизаторов вида

$$C_G(a_i) \ < \ C_G(a_i^{m_1}) \ < \ \ldots \ < \ C_G(a_i^{m_{k_i}})$$

всегда переходит в цепочку строго возрастающих централизаторов в H

$$C_H(x_i) \ < \ C_H(x_i^{m_1}) \ < \ \ldots \ < \ C_H(x_i^{m_{k_i}}).$$

Отсюда вытекает, что $x_1, \ldots, x_n$ эллиптические элементы.

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Замечание. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *редуцированные* *деревья* *с метками и соответствующие GBS группы* $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $H = \pi_1(\mathbb{B})$ *неабелевы. Тогда существует алгоритм, распознающий универсальную (экзистенциальную) эквивалентность групп* G *и* H.

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

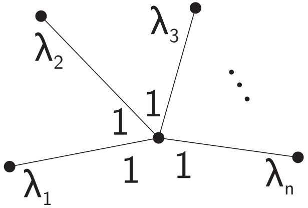


Рис.: Дерево с метками $\mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Лемма. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A}$ *дерево с метками,* $\pi_1(\mathbb{A}) = G$ *и* $cdim(G) = 2$. *Тогда* $G \simeq \pi_1(\mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$ *для подходящих* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

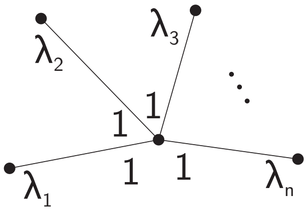


Рис.: Дерево с метками $\mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

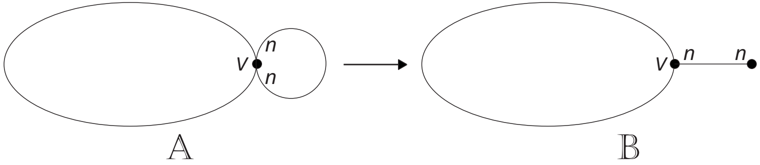
Лемма. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A}$ *дерево с метками,* $\pi_1(\mathbb{A}) = G$ *и* $cdim(G) = 2$. *Тогда* $G \simeq \pi_1(\mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$ *для подходящих* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема. (ФД, 2020) *Пусть* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ *и* $\pi_1(\mathbb{B})$ *не изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна. Группа* $\pi_1(\mathbb{A})$ *вкладывается в* $\pi_1(\mathbb{B})$ *тогда и только тогда, когда для всякого* $1 \leqslant i \leqslant n$ *найдется* $1 \leqslant j \leqslant m$ *такой, что* λ_i *делит* μ_j.

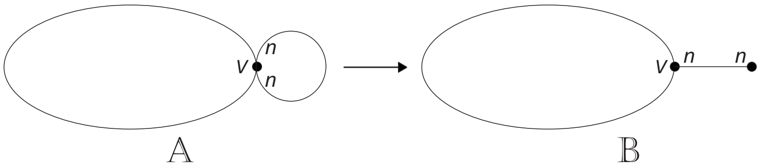
Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема 1. (О расправлении петель, ФД, 2023)
Если граф с метками $\mathbb{B}$ *получен из графа с метками* $\mathbb{A}$ *с помощью* *замены петли* *в вершине* v *с метками* (n, n), $|n| \geqslant 2$ *на ребро* *с началом в* v, *концом в новой вершине и метками* (n, n), *то* $\pi_1(\mathbb{A}) \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{B})$.



Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема 1. (О расправлении петель, ФД, 2023)
Если граф с метками $\mathbb{B}$ *получен из графа с метками* $\mathbb{A}$ *с помощью* ***замены петли*** *в вершине* v *с метками* (n, n), $|n| \geqslant 2$ ***на ребро*** *с началом в* v, *концом в новой вершине и метками* (n, n), *то* $\pi_1(\mathbb{A}) \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{B})$.



Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема 2. (ФД, 2023) *Если граф с метками* $\mathbb{A}$ *неабелевой GBS группы* G *содержит петлю с метками* $(1, 1)$ *или разными метками, то группа* G *не может быть универсально эквивалентна фундаментальной группе дерева с метками.*

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема 3. (ФД, 2023) *GBS группа G универсально эквивалентна фундаментальной группе некоторого дерева с метками тогда и только тогда, когда группу G можно представить графом с метками $\mathbb{A}$ который получается из некоторого дерева с метками добавлением (n, n), $|n| \geqslant 2$ петель.*

Замечание. (ФД, 2023) *Пусть GBS группа G задана графом с метками $\mathbb{A}$. Существует алгоритм, который проверяет найдется ли такое дерево с метками $\mathbb{B}$, что $G \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{B})$. Если такие деревья с метками существует, то алгоритм строит одно из них.*

Универсальная эквивалентность *GBS* групп

Теорема 3. (ФД, 2023) *GBS группа G универсально эквивалентна фундаментальной группе некоторого дерева с метками тогда и только тогда, когда группу G можно представить графом с метками $\mathbb{A}$ который получается из некоторого дерева с метками добавлением (n, n), $|n| \geqslant 2$ петель.*

Замечание. (ФД, 2023) *Пусть GBS группа G задана графом с метками $\mathbb{A}$. Существует алгоритм, который проверяет найдется ли такое дерево с метками $\mathbb{B}$, что $G \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{B})$. Если такие деревья с метками существует, то алгоритм строит одно из них.*

Спасибо за внимание!