О вложениях в классе частично коммутативных нильпотентных групп

А. Л. Евтягин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск

Науч. рук. – д-р. физ.-мат. наук В. А. Романьков

Частично коммутативные группы

Пусть $\Gamma = \langle X | E \rangle$ – неориентированный простой граф с множеством вершин $X = \{x_1, ..., x_n\}$ и множеством ребер $E \subseteq X \times X$.

Частично коммутативная группа $F(\Gamma)$ определяется следующим образом:

$$F(\Gamma) = \langle X | xy = yx \Leftrightarrow (x, y) \in E \rangle . \tag{1}$$

По данному многообразию групп $\mathfrak{M}$ и данному графу $\Gamma = \langle X | E \rangle$ определяется частично коммутативная группа $F(\Gamma, \mathfrak{M})$:

$$F(\Gamma, \mathfrak{M}) = \langle X | xy = yx \Leftrightarrow (x, y) \in E; \mathfrak{M} \rangle . \tag{2}$$

Мальцевские базы

Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Тогда у G существует центральный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_{n+1} = 1 \qquad (3)$$

с бесконечными циклическими факторами.

Упорядоченный набор $a_i \in G_i$, таких что $G_i = gr(a_i, G_{i+1})$, $i = 1, \ldots, s$, называется *мальцевской базой группы* G, соответствующей ряду (3).

Мальцевские базы

Произвольный элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = \prod_{i=1}^{s} a_s^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Известно[1] конструктивное описание мальцевской базы произвольной частично коммутативной группы $F(\Gamma, \mathfrak{N}_\ell)$, где $\mathfrak{N}_\ell$ – многообразие всех нильпотентных групп ступени не больше чем ℓ. Таким образом, для любого $g \in F(\Gamma, \mathfrak{N}_\ell)$ можно найти вид (4).

[1] E. I. "Timoshenko, Mal'tsev bases for partially commutative nilpotent groups" Int. J. Algebra Comput., 32 (2021), 1–9.

Базисные коммутаторы

В качестве мальцевской базы частично коммутативной нильпотентной группы без кручения ступени ℓ можно взять *базисные коммутаторы* Ф. Холла[2], определяемые следующим образом:

- Базисные коммутаторы веса 1 – это пораждающие элементы с естественным порядком $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$;
- Базисные коммутаторы веса p – это элементы $[u, v]$, где u и v – базисные коммутаторы веса q и t соответственно, где $q + t = p$ и $u > v$. При этом, если $u = [u_1, u_2]$ для базисных коммутаторов u_1 и u_2, то $u_2 \leq v$. Коммутаторы большего веса имеют больший порядок, коммутаторы одного веса упорядочены произвольным образом.
- Базисные коммутаторы определяются до веса ℓ включительно.

[2] Ph. Hall, The Edmonton notes on nilpotent groups. Queen Mary College Mathematics Notes. Mathematics Department, Queen Mary College, London, 1969., Mathematics Department, Queen Mary College, London, 1969.

Вложения в классе частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2

Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_r$, $(a_1, \ldots, a_s)$ – её мальцевская база. И пусть H – нильпотентная группа с выделенным набором элементов $g_1, \ldots, g_r$ такая, что отображение $y_i \mapsto g_i$, $i = 1, \ldots, r$ определяет гомоморфизм φ группы G в группу H.

Лемма[3]. *Гомоморфизм φ является вложением, тогда и только тогда, набор элементов $(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_s))$ составляет мальцевскую базу образа $\varphi(G)$.*

[3] В. А. Романьков, "Вложение свободных нильпотентных (метабелевых) групп в частично коммутативные нильпотентные (метабелевы) группы" Математические заметки, 2023

Вложения в классе частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2

Пусть $\Gamma = \langle X | E_1 \rangle$ и $\Delta = \langle Y | E_2 \rangle$ – графы с вершинами $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ соответственно, а $F_1 = F(\Gamma, \mathfrak{N}_2)$ и $F_2 = F(\Delta, \mathfrak{N}_2)$ – определенные по ним группы.

Любой набор элементов $(g_1, \ldots, g_m)$ группы F_1 может быть записан в виде

$$g_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} u_j, \qquad (5)$$

с неопределенными показателями степеней α_{ij}, и произвольными элементами u_j из коммутанта F_1'.

Вложения в классе частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2

Теорема 1. *Существует алгоритм, который определяет, является ли вложением отображение* $\Theta : F_2 \to F_1$, $\Theta(y_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, m$ *при некотором выборе параметров* α_{ij}.

Идея доказательства. Чтобы Θ было гомоморфизмом, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$[\Theta(y_i), \Theta(y_j)] = [g_i, g_j] = 1. \tag{6}$$

Подставив (5) в (6), получим

$$[g_i, g_j] = \prod_{(k,t), k>t} [x_k, x_t]^{\delta_{kt}(i,j)} = 1, \tag{7}$$

где $\delta_{kt}(i,j) = \alpha_{ik}\alpha_{jt} - \alpha_{it}\alpha_{jk}$.

Вложения в классе частично коммутативных нильпотентных групп ступени 2

Далее, задача сводится к выяснению, являются ли наборы показателей степеней в (7) линейно независимыми. Если являются, то Θ – вложение, а если не являются, то Θ – не вложение.

Графы ненулевого радиуса

Эксцентриситетом $\varepsilon(y)$ вершины y графа Δ называется максимальное расстояние от неё до дрвгих вершин графа. *Радиусом* $r(\Delta)$ графа Δ называется минимальный эксцентриситет его вершин.

Граф Δ имеет ненулевой радиус тогда и только тогда, когда в нем нет вершин инцидентных всех другим вершинам. Для группы $F(\Delta, \mathfrak{N}_\ell)$ это означает отсутствие вершин, принадлежащих ее центру.

Вложения ч. к. н. групп произвольной ступени ℓ в свободные нильпотентные группы ступени ℓ

Пусть $N_{r,\ell}$ – свободная нильпотентная группа ранга r ступени ℓ.

Теорема 2. *Существует алгоритм, определяющий возможность вложения Θ конечно порожденной частично коммутативной нильпотентной группы $F(\Delta, \mathfrak{N}_\ell)$ произвольной ступени ℓ относительно графа Δ ненулевого радиуса в свободную нильпотентную группу $N_{r,\ell}$.*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!