Об аксиоматизируемости гиперграфов и разрешимости их универсальных теорий

А.В. Ильев

Институт математики им. С.Л.Соболева, Омск.

Алгебраические системы

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathrm{L}=\mathrm{R}\cup\mathrm{F}\cup\mathrm{C}$ — это пара $\langle A, I\rangle$, состоящая из непустого множества A, называемого *носителем* системы $\mathcal{A}$, и отображения (интерпретации) I, которое

1) каждому предикатному символу $R\in\mathrm{R}$ ставит в соответствие n_R-местное отношение $R^{\mathcal{A}}\subseteq A^{n_R}$;

2) каждому функциональному символу $F\in\mathrm{F}$ ставит в соответствие n_F-местную функцию $F^{\mathcal{A}}: A^{n_F}\to A$;

3) каждому константному символу $c\in\mathrm{C}$ ставит в соответствие некоторый элемент $c^{\mathcal{A}}\in A$.

Классы алгебраических систем

Класс алгебраических систем — это семейство однотипных систем. Все системы любого заданного типа языка L называются L-*системами*.

Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *абстрактным*, если вместе с каждой своей системой $\mathcal{A}$ он содержит все изоморфные ей L-системы.

Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем *аксиоматизируем*, если существует такое множество предложений Z языка L, что произвольная L-система $\mathcal{A}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда любое предложение $\varphi \in Z$ истинно в $\mathcal{A}$.

Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$.

Графы

Граф — это пара $G = (U, E_G)$, где U — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E_G — множество неупорядоченных пар различных элементов из U, называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E_G$, то вершины u и v называются *смежными*. Графы без петель и кратных рёбер называются *обыкновенными*.

Обыкновенный граф — это алгебраическая система $G = \langle U, \mathrm{L}_G \rangle$, носитель которой U — непустое множество вершин, язык $\mathrm{L}_G = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности $E(x, y)$ *иррефлексивен и симметричен*, т. е., удовлетворяет условиям:

(G1) $\forall x \; \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

(G2) $\forall x \; \forall y \; [E(x, y) \to E(y, x)]$ (симметричность).

Гиперграфы

Гиперграф — это пара $H = (V, E_H)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E_H — некоторое семейство непустых неупорядоченных подмножеств множества V, называемых *рёбрами* или *гиперрёбрами*.

Гиперграф — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H \rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L}_H = \langle E_1, E_2, ..., = \rangle$ состоит из счётного множества предикатов, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства; предикат $E_n(x_1, ..., x_n)$ означает, что элементы $x_1, ..., x_n$ лежат в ребре гиперграфа степени n, т. е. предикат $E_n(x_1, ..., x_n)$ удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов*:

(H1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \; [E_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} E_n(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))]$,

где π — любая перестановка $x_1, \ldots, x_n$, $\; n \in \mathbb{N}$;

(H2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \; [E_n(x_1, \ldots, x_n) \to \bigwedge\limits_{s \neq t} (x_s \neq x_t)]$, $\; n \in \mathbb{N}$.

Наследственные классы гиперграфов

Подгиперграф — это подсистема, полученная из исходного гиперграфа удалением вершин вместе со всеми инцидентными рёбрами.

Класс гиперграфов называется *наследственным*, если он замкнут относительно подгиперграфов. Рассмотрим примеры таких классов гиперграфов.

Пример 1. Класс линейных гиперграфов.
Гиперграф называется *линейным*, если его рёбра пересекаются максимум по одной вершине.

Пример 2. Класс антицепей.
Гиперграф называется *антицепью*, если никакое из его его рёбер не является подмножеством другого ребра.

Аксиоматизируемость классов гиперграфов

Линейный гиперграф — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H \rangle$, которая является гиперграфом и удовлетворяет условию

$$\text{(H3')}\ \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \forall y_1 \ldots \forall y_m\ [E_k(x_1, \ldots, x_k) \wedge E_m(y_1, \ldots, y_m) \wedge \\ \wedge\ (x_s = y_t) \to \bigwedge_{\substack{i \neq s \\ j \neq t}} (x_i \neq y_j)],\ \ k, m \in \mathbb{N}.$$

Антицепь — это алгебраическая система $H = \langle V, \mathrm{L}_H \rangle$, которая является гиперграфом и удовлетворяет условию

$$\text{(H3'')}\ \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \forall y_1 \ldots \forall y_m\ [E_k(x_1, \ldots, x_k) \to \\ \to \neg E_{k+m}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)],\ \ k, m \in \mathbb{N}.$$

Универсальные теории

Предложение — это формула, не содержащая свободных переменных. Совокупность $T(\boldsymbol{K})$ всех предложений языка L, истинных во всех алгебраических системах из $\boldsymbol{K}$, называется *теорией* класса $\boldsymbol{K}$.

Формула φ называется *универсальной* или *$\forall$-формулой*, если она имеет вид $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi$, где ψ — бескванторная формула.

Теория называется *универсальной*, если она включает только предложения, являющиеся универсальными формулами.

Разрешимые теории

При рассмотрении любой теории первостепенное значение имеет вопрос о её разрешимости.

Пусть S_{L} — множество всех предложений языка L.

Теория T называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий для любого предложения φ из S_{L} установить, принадлежит ли φ теории T.

Установление разрешимости теории какого-либо класса $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам класса $\boldsymbol{K}$.

Разрешимость универсальных теорий

Теорема. Справедливы следующие утверждения.

1) *Универсальная теория гиперграфов разрешима.*

2) *Универсальная теория линейных гиперграфов разрешима.*

3) *Универсальная теория антицепей разрешима.*

Идея доказательства

Для каждого класса предлагается свой алгоритм, который для любого $\forall$-предложения φ языка L_H отвечает на **вопрос**: принадлежит или нет φ универсальной теории данного класса гиперграфов.

1) Алгоритм строит отрицание $\neg\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \psi$.

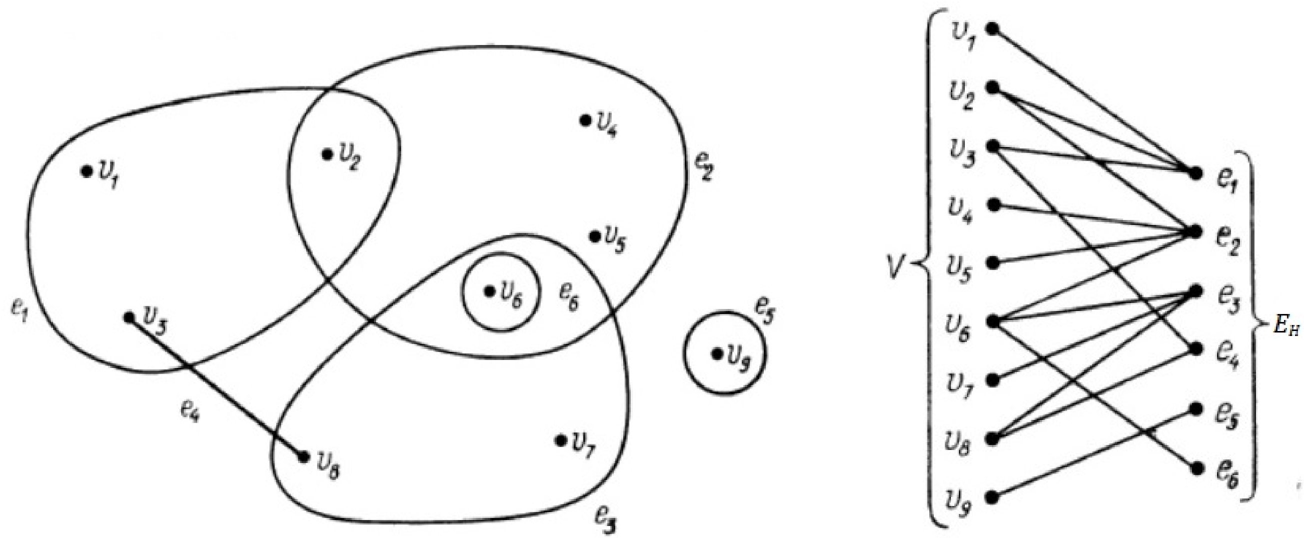
2) $\neg\varphi$ приводится к ПДФ: $\exists x_1 \ldots \exists x_n\ (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)$.

3) Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты ψ_i и удаляет те из них, для которых невозможно построить гиперграф, удовлетворяющий условию конъюнкта ψ_i.

В итоге если для какого-то конъюнкта удалось построить удовлетворяющий его условию гиперграф, значит исходное предложение φ не принадлежит универсальной теории данного класса гиперграфов. В противном случае φ принадлежит этой теории.

Кёниговы представления гиперграфов

Граф $K(H) = (U, E_K)$ называется *кёниговым представлением* гиперграфа $H = (V, E_H)$, если он является его графом инциденций, т. е. обыкновенным двудольным графом с множеством вершин $U = V \cup E_H$ и множеством рёбер $E_K = \{(v, e) \mid (v, e) \in V \times E_H,\ v \in e\}$.



Пример гиперграфа и его кёнигова представления.

Кёнигово представление гиперграфа — это алгебраическая система $K = \langle U, \mathrm{L}_K \rangle$, носитель которой U — непустое множество вершин, а язык $\mathrm{L}_K = \langle V, E, = \rangle$ состоит из унарного предиката $V(x)$, бинарного предиката $E(x, y)$ и предиката равенства; предикат $V(x)$ означает, что элемент x является вершиной соответствующего гиперграфа, а предикат $E(x, y)$ означает, что в гиперграфе либо вершина x лежит в ребре y, либо вершина y лежит в ребре x; т. е. для предикатов $V(x)$ и $E(x, y)$ выполнены аксиомы:

(K1) $\forall x \; \neg E(x, x)$;

(K2) $\forall x \; \forall y \; [E(x, y) \to E(y, x)]$;

(K3) $\forall x \; \forall y \; [V(x) \wedge V(y) \to \neg E(x, y)]$;

(K4) $\forall x \; \forall y \; [\neg V(x) \wedge \neg V(y) \to \neg E(x, y)]$;

(K5) $\forall x \; \exists y \; [V(x) \vee E(x, y)]$;

(K6) $\forall x \; \forall y \; \exists z \; [(x = y) \vee V(x) \vee V(y) \vee$
$$\vee (E(x, z) \wedge \neg E(y, z)) \vee (\neg E(x, z) \wedge E(y, z))].$$

Класс кёниговых представлений гиперграфов

Критерий универсальной аксиоматизируемости. Аксиоматизируемый класс L-систем $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.

Замечание. Класс кёниговых представлений гиперграфов незамкнут относительно подсистем и, следовательно, не является универсально аксиоматизируемым.

Теорема. Универсальная теория кёниговых представлений гиперграфов разрешима.

Термы

Пусть X — некоторое множество переменных.

Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* языка L определяется рекурсивно:

(T1) все переменные $x \in X$ являются термами;

(T2) все константные символы языка L являются термами;

(T3) если $t_1, ..., t_n$ — термы и $F(x_1, ..., x_n)$ — функциональный символ языка L, то $F(t_1, ..., t_n)$ есть терм.

Так как язык L_K кёниговых представлений гиперграфов не содержит функциональных символов, то его термами являются только переменные и константы.

Уравнения

Пусть $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — конечное множество переменных.

Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества X определяется следующим образом:

(A1) если $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$, то $t_1 = t_2$ — атомарная формула;

(A2) если $t_1, ..., t_n \in T_{\mathrm{L}}(X)$ и $R(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}$, то $R(t_1, ..., t_n)$ — атомарная формула.

Атомарные формулы множества $At_{\mathrm{L}}(X)$ называются *уравнениями* языка L с переменными из X. Всякое подмножество $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ называется *системой уравнений* языка L.

Алгебраические множества

Точка $a = (a_1, ..., a_n) \in A^n$ называется *решением уравнения* φ над алгебраической системой $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$, если $\mathcal{A} \models \varphi(a)$.

Точка $a = (a_1, ..., a_n) \in A^n$ является *решением системы уравнений* $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$, если она является решением каждого уравнения из S.

Множество $V_{\mathcal{A}}(S)$ всех решений системы S называется *алгебраическим множеством* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, определённым системой уравнений S.

Если $V_{\mathcal{A}}(S) = \emptyset$, то система уравнений S называется *несовместной* над алгебраической системой $\mathcal{A}$; иначе она называется *совместной*.

Уравнения над кёниговыми представлениями гиперграфов

Пусть $K = \langle U(K), E(K) \rangle$ — кёнигово представление некоторого конечного гиперграфа — фиксированный конечный двудольный граф.

Дополним язык $\mathrm{L}_K = \langle V, E, = \rangle$ до диофантова языка множеством констант C, совпадающим с множеством U вершин графа K.

$S \subseteq At_{\mathrm{L}_K}(X)$ — конечная система уравнений над графом K, состоящая из уравнений вида $V(x_i)$, $V(u_j)$, $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, u_j)$, $E(u_i, u_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = u_j$, $u_i = u_j$.

Замечание. Процедура решения систем уравнений над кёниговыми представлениями гиперграфов является усложнённым вариантом процедуры решения систем уравнений над двудольными графами.

Информационная база системы

Информационная база системы S состоит из набора конечных множеств и натуральных чисел, определяемых по группам:

1) $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — множество переменных, $S = \{s_1, ..., s_l\}$ — множество уравнений с переменными из X; k, l — числовые параметры.

2) $\overline{v}$ — характеристический вектор длины k; $v_i = 1 \Leftrightarrow$ уравнение $v(x_i)$ содержится в системе S.

3) $\overline{v}^{\perp}$ — характеристический вектор длины k; $v_i^{\perp} = 1 \Leftrightarrow$ уравнение $E(x_i, u_j)$ содержится в системе S, при этом $V(u_j)$ истинно в графе K.

4) $\overline{v}^{\perp\perp}$ — характеристический вектор длины k; $v_i^{\perp\perp} = 1 \Leftrightarrow$ уравнение $E(x_i, u_j)$ содержится в системе S, при этом $V(u_j)$ ложно в графе K.

5) $W_1, ..., W_k$ — подмножества $U(K)$; W_i состоит из вершин графа K, которые содержатся в записи уравнений вида $E(x_i, u_j)$ системы S; $\alpha_i = |W_i|$ — числовые параметры, $i = 1, ..., k$.

6) $W_1^\perp, ..., W_k^\perp$ — подмножества $U(K)$; $W_i^\perp$ состоит из вершин графа K, которые смежны с каждой из вершин множества W_i (если $W_i = \emptyset$, то по определению полагаем $W_i^\perp = U(K)$); $\beta_i = |W_i^\perp|$ — числовые параметры, $i = 1, ..., k$.

7) $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$ — подмножества $U(K)$; $W_i^{\perp\perp} = (W_i^\perp)^\perp$; $\gamma_i = |W_i^{\perp\perp}|$ — числовые параметры, причём $\gamma_i \geq \alpha_i$ для любых $i = 1, \ldots, k$.

Если в информационной базе хотя бы одно из чисел β_i равно нулю при $\alpha_i \neq 0$, либо если $v_i = v_i^\perp = 1$ или $v_i^\perp = v_i^{\perp\perp} = 1$ для какого-то $i \in [1, k]$, то информационная база является *несогласованной*, а система S несовместна над K.