О метрических свойствах выпуклых оболочек орбит полярных групп

Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики
26–30 сентября, 2023
Омск, Россия

Обозначения

- $\mathcal{E}$ — евклидово пространство,
- G — компактная связная подгруппа $\mathrm{O}(\mathcal{E})$,
- $O_u = Gu$ — орбита точки $u \in \mathcal{E}$,
- T_u — сокращение обозначения $T_u O_u$,
- $N_u = T_u^{\perp}$ — нормальное пространство к O_u,
- $\mathfrak{F}_G$ — слоение орбит G.

Точку u и слой O_u будем называть регулярными, если O_u имеет максимальную возможную размерность. Его коразмерность называется рангом $\mathfrak{F}_G$.

Полярные группы

Определение

Группа G называется полярной, если существует линейное подпространство $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ такое, что

- любая орбита G пересекает $\mathcal{A}$ и
- $T_u \perp \mathcal{A}$ для всех $u \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ называется подпространством Картана.

Полярные группы и s-представления

Линейные группы G и G' орбитально эквивалентны, если существует отождествляющий $\mathfrak{F}_G$ и $\mathfrak{F}_{G'}$ линейный изоморфизм.

Пусть

- $\mathfrak{g}$ – полупростая вещественная алгебра Ли,
- $\mathfrak{k}$ – подалгебра $\mathfrak{g}$ отвечающая максимальной компактной подгруппе в G,
- $\mathfrak{p}$ – дополнительное к $\mathfrak{k}$ подпространство такое, что

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

Действие Ad отвечающей $\mathfrak{k}$ группы K в $\mathfrak{p}$ можно считать представлением изотропии симметрического пространства G/K, а орбитально эквивалентные ему называются s-представлениями.

В работе [1] (Дадок Д. 1985) доказал, что представление полярно тогда и только тогда, когда оно является s-представлением.

Множество сингулярных точек действия группы K — это объединение зеркал (гиперплоскостей).

Максимальная абелева подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{p}$ является подпространством Картана.

Множество зеркал разбивает $\mathcal{A}$ на выпуклые конусы. Выберем один из них — это камера Вейля C. Отражения в зеркалах порождают группу Вейля W и определяют систему корней Δ.

Каждая орбита W пересекает C ровно в одной точке.

Фиксируем $o \in \mathrm{Int}(C)$ и определим полярные координаты $(\rho(u), \theta(u))$ точки u как отображения $\rho : \mathcal{E} \to C$ и $\theta : \mathcal{E} \to O_o$, определяемые условиями:

$$\rho(u) = O_u \cap C;$$
$$\theta(u) - \text{ ближайшая к } u \text{ точка } O_o.$$

Отображение $\nu_\rho : O_o \to O_\rho$ ставит в соответствие $\theta \in O_o$ ближайшую к θ точку (ρ, θ) из орбиты O_ρ. Оно переводит инвариантную меру на O_o в инвариантную меру на O_ρ, поскольку коммутирует с действием K.
Можно показать, что

$$\det d_o \nu_\rho = \varkappa \cdot K(\rho), \qquad \text{где } K(\rho) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \langle \alpha, \rho \rangle^{\mu_\alpha}.$$

μ_α — размерность собственного подпространства соответствующего корню α. Константа $\varkappa$ зависит лишь от геометрии.

Пусть Σ — множество простых корней системы Δ. Определим Ω как двойственный к Σ базис. То есть $\varpi_\alpha \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, \varpi_\alpha \rangle = 1$ и $\langle \alpha, \varpi_\beta \rangle = 0$ для всех $\beta \neq \alpha$.
Положим

$$R_u = \widehat{Wu} \cap C,$$

$$R_{u,\alpha} = R_u \cup \{x : \langle x - u, \varpi_\alpha \rangle = 0\},$$

$$\widehat{R}_{u,\alpha} = \widehat{R_{u,\alpha} \cup \{0\}}.$$

Для $u \in C$ определим многочлен $V(u)$

$$V(u) = \int_{R_u} K(\xi) d\xi.$$

Функция $V(u)$ является однородным многочленом на $\mathcal{A}$ степени $\dim \mathcal{E}$. При этом

$$D_\alpha V(u) = \frac{1}{|\alpha|} \int_{R_{u,\alpha}} K(x) dx$$

и

$$\left(\prod_{\alpha \in \Sigma} D_\alpha \right) V(u) = K(u).$$

Имеют место следующие соотношения

$$R_u = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{R}_{u,\alpha_i}, \quad \widehat{R}_{u,\alpha} = \bigcup_{t\in[0;1]} tR_{u,\alpha}.$$

Используя однородность многочлена $K(u)$, можно получить следующую формулу для многочлена объёма

$$V(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\mu_i+n} \int\limits_{R(u';\Delta')} K(y;u_i)dy,$$

где $K(u';u_i)$ сужение функции $K(u)$ на грань R_{u,α_i}, многогранник $R(u';\Delta')$ — выпуклая оболочка орбиты группы Вейля системы корней $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$.

Система корней A_2 кратности корней равны 1, в декартовом базисе:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} x(3y^2 - x^2),$$

$$V(u) = -\frac{15\sqrt{2}}{256} yx^4 + \frac{27\sqrt{2}}{128} y^3x^2 + \frac{9\sqrt{2}}{1280} y^5 + \frac{17\sqrt{6}}{1280} x^5 - \\ - \frac{5\sqrt{6}}{128} y^2x^3 + \frac{9\sqrt{6}}{256} y^4x,$$

$$\varkappa = 4\sqrt{2}\pi^2.$$

Система корней A_2 кратности корней равны 2, в базисе фундаментальных весов:

$$K(u) = (st(s+t))^2\,,$$

$$V(u) = \frac{\sqrt{3}}{10080}(s^8 + 16s^7t + 112s^6t^2 + 448s^5t^3 + 700s^4t^4 + \\ +448s^3t^5 + 112s^2t^6 + 16st^7 + t^8),$$

$$\varkappa = 4\pi^3.$$

Система корней A_3 кратности корней — 1, в базисе фундаментальных весов:

$$K(u) = stu(s+t)(u+t)(s+u+t),$$

$$V(u) = \frac{1}{1935360}\Big(s^9 + 18s^8t + 27s^8u + 144s^7t^2 + 432s^7tu +$$
$$+324s^7u^2 + 672s^6t^3 + 3024s^6t^2u + 4536s^6tu^2 + 1428s^6u^3 + 2016s^5t^4 +$$
$$+12096s^5t^3u + 27216s^5t^2u^2 + 17136s^5tu^3 + 2646s^5u^4 + 4032s^4t^5 +$$
$$+30240s^4t^4u + 90720s^4t^3u^2 + 85680s^4t^2u^3 + 26460s^4tu^4 + 2646s^4u^5 +$$
$$+4704s^3t^6 + 40320s^3t^5u + 141120s^3t^4u^2 + 174720s^3t^3u^3 + 85680s^3t^2u^4 +$$
$$+17136s^3tu^5 + 1428s^3u^6 + 2880s^2t^7 + 26208s^2t^6u + 96768s^2t^5u^2 +$$
$$+141120s^2t^4u^3 + 90720s^2t^3u^4 + 27216s^2t^2u^5 + 4536s^2tu^6 + 324s^2u^7 +$$
$$+828st^8 + 7488st^7u + 26208st^6u^2 + 40320st^5u^3 + 30240st^4u^4 + 12096st^3u^5 +$$
$$+3024st^2u^6 + 432stu^7 + 27su^8 + 92t^9 + 828t^8u + 2880t^7u^2 + 4704t^6u^3 +$$
$$+4032t^5u^4 + 2016t^4u^5 + 672t^3u^6 + 144t^2u^7 + 18tu^8 + u^9\Big).$$

Предполагается, что существует одномерный характер χ группы Вейля W, для которого справедливо равенство

$$\sum_{g\in W} \chi(g)V(gu) = 0 \text{ для всех } u \in \mathcal{A}.$$

Вычисления для рангов 2 и 3 позволяют предположить, что искомый характер определятся равенством:

$$K(gu) = \chi(g)K(u).$$

Следуя [7] определим смешанный объём $V(K_1, \dots, K_n)$ непустых выпуклых компактов $K_1, \dots, K_n$ в $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$Vol(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_n K_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_n},$$

где предполагается, что при различающихся только порядком сомножителей произведениях λ_{i_j} стоят численно равные множители.

Определение

m-той интегральной поперечной мерой компакта K называется число

$$V_m = V(\underbrace{K, \dots, K}_{m}, \underbrace{B, \dots, B}_{n-m}),$$

где B замкнутый единичный шар в $\mathcal{E}$.

Произвольная точка $u \in C$ представима в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} s_i \varpi_i \quad \text{причем все } s_i \geq 0.$$

Коэффициент при $s_1^{m_1} \cdot \dots \cdot s_n^{m_n}$ многочлена $V(u)$ в базисе фундаментальных весов пропорционален смешанному объёму $V(K_1^{m_1}, \dots, K_n^{m_n})$, где $K_j = \widehat{O}_{\varpi_j}$, коэффициент пропорциональности можно выписать явно.

Пусть K^n — класс всех не пустых компактных выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Валюация на K^n есть функция $v : K^n \to \mathbb{R}$ такая, что равенство

$$v(S) + v(T) = v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

выполняется для любых $S, T \in K^n$ таких, что $S \cup T \in K^n$.

Теорема ([3], Hadwiger H. 1957)

Любая непрерывная валюация v на K^n, инвариантная относительно движений, может быть представлена в виде

$$v(S) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot V_j(S),$$

где $V_j(S)$ — j-тая поперечная мера S.

Определение

Функционалом Виллса непустого выпуклого компакта K называется интеграл

$$W(K) = \int_{\mathcal{E}} \exp(-\pi\delta(K,x)^2)dx,$$

где $\delta(K,x)$ — расстояние от точки x до K.

В работе (McMullen P., [4],1991) было показано, что:

$$W(\lambda K) = \sum_{j\geq 0} \lambda^j W_j(K),$$
$$C_n^j V_{n-j}(K) = \varpi_{n-j} W_j(K).$$

Где $\varpi_j = Vol_j(B_j)$ — объём j-мерного единичного шара.

A_2 кратности 1

$C_5^0 V_0$	$-\frac{15\sqrt{2}}{256} y x^4 + \frac{27\sqrt{2}}{128} y^3 x^2 + \frac{9\sqrt{2}}{1280} y^5 + \frac{17\sqrt{6}}{1280} x^5 - -\frac{5\sqrt{6}}{128} y^2 x^3 + \frac{9\sqrt{6}}{256} y^4 x$
$C_5^1 V_1$	$-\frac{5\sqrt{6}}{64} x^3 y + \frac{9\sqrt{6}}{64} x y^3 + \frac{\sqrt{2}}{256} x^4 + \frac{33\sqrt{2}}{128} x^2 y^2 + \frac{9\sqrt{2}}{256} y^4$
$C_5^2 V_2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}(3xy^2 - x^3) + \frac{3\sqrt{6}}{32\pi}(x^3 + xy^2 + \sqrt{3}(x^2 y + y^3))$
$C_5^3 V_3$	$\frac{3\sqrt{2}}{64\pi}(6\sqrt{3}xy + x^2 + 7y^2)$
$C_5^4 V_4$	$\frac{3\sqrt{6}}{16\pi^2}(x + \sqrt{3}y)$
$C_5^5 V_5$	$\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}$

Список литературы

J. Dadok, *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups* // Transaction of the AMS, V. 288 (1985), p. 126–137.

Gichev V.M. *Polar representations of compact groups and convex hulls of their orbits* // Diff. Geom. and its Appl. 2010. v. 28. p. 608–614.

Hadwiger, H. Vorlesungen ьber Inhalt, Oberflдche und Isoperimetrie. — Berlin: Springer, 1957.

McMullen P., *Inequalities Between Intrinsic Volumes* // Mh. Math. 111, 47-53 (1991).

Palais R.S., Terng C.-I., *Critical Point Theory and Submanifold Geometry* // Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.

Список литературы

- Schneider R., *Convex bodies, Brunn-Minkowski theory* // Cambridge, 1993, 253 p.
- Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер, *Геометрические неравенства* // "Наука"Ленинградское отделение, 1980, Ленинград.
- М. Громов, *Знак и геометрический смысл кривизны* // Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000 — 128 с.

Спасибо за внимание!