Решение уравнений в бициклическом моноиде

Автор: Пичуев К.Д.

2023

Цель работы

Рассмотреть условия разрешимости уравнений в бициклическом моноиде

Определение:

$B = < a, b | ab = e >$ - будем называть бициклическим моноидом.

Основные определения

Определение:

$B =< a, b | ab = e >$ - будем называть бициклическим моноидом.

Определение:

Под нормальной формой элемента в бициклическом моноиде B будем понимать

$$b^m a^n,$$

где $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Актуальность

По системе уравнений в бициклическом моноиде можно построить эквивалентную ей систему над арифметикой Пресбургера, а там проблема разрешимости систем уравнений разрешима

Актуальность

По системе уравнений в бициклическом моноиде можно построить эквивалентную ей систему над арифметикой Пресбургера, а там проблема разрешимости систем уравнений разрешима

НО

Актуальность

По системе уравнений в бициклическом моноиде можно построить эквивалентную ей систему над арифметикой Пресбургера, а там проблема разрешимости систем уравнений разрешима

НО

Экспоненциальная вычислительная сложность

Актуальность

По системе уравнений в бициклическом моноиде можно построить эквивалентную ей систему над арифметикой Пресбургера, а там проблема разрешимости систем уравнений разрешима

НО

Экспоненциальная вычислительная сложность

Поэтому интересно рассмотреть частные случаи систем, где разрешимость определяется за полиномиальное время

Основные определения

Определение:

Нормальной формой произведения двух произвольных элементов $x = b^m a^n, y = b^k a^l$ в бициклическом моноиде B является

$$x * y = b^m a^n * b^k a^l = b^{m+k-\min\{n,k\}} * a^{l+n-\min\{n,k\}}.$$

Основные определения

Определение:

Нормальной формой произведения двух произвольных элементов $x = b^m a^n, y = b^k a^l$ в бициклическом моноиде B является

$$x * y = b^m a^n * b^k a^l = b^{m+k-\min\{n,k\}} * a^{l+n-\min\{n,k\}}.$$

Определение:

Под степенью элемента $x = b^m a^n$ будем понимать вектор (m, n), где $m, n \in \mathbb{N} \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Основные определения

Определение:

Нормальной формой произведения двух произвольных элементов $x = b^m a^n, y = b^k a^l$ в бициклическом моноиде B является

$$x * y = b^m a^n * b^k a^l = b^{m+k-\min\{n,k\}} * a^{l+n-\min\{n,k\}}.$$

Определение:

Под степенью элемента $x = b^m a^n$ будем понимать вектор (m, n), где $m, n \in \mathbb{N} \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Определение:

Говорим, что степень элемента $x = b^n a^m$ больше степени элемента $y = b^k a^l$, если координаты вектора степени x больше соответствующих координат вектора степени y, то есть $n > k$ и $m > l$, и говорим, что меньше наоборот.

Основные определения

Определение:

Под разностью степеней $x = b^n a^m, y = b^k a^l$ в B будем понимать вектор $(n - k, m - l)$.

Основные определения

Определение:

Под разностью степеней $x = b^n a^m, y = b^k a^l$ в B будем понимать вектор $(n-k, m-l)$.

Определение:

Операция обращения в B имеет следующий вид: $a^{-1} = b$ и $b^{-1} = a$. Для произвольного элемента из $x \in B$:

$$x^{-1} = (b^m a^n)^{-1} = a^{-n} b^{-m} = b^n a^m.$$

Определение:

Введем функцию

$$deg_1(x) = \begin{cases} k, x = a^k, \\ l, x = b^l, \end{cases}$$

Определение:

Введем функцию

$$deg_1(x) = \begin{cases} k, x = a^k, \\ l, x = b^l, \end{cases}$$

Определение:

Введем функцию возвращающую вектор степени произвольного элемента бициклического моноида

$$deg_2(x) = (k, l), x = b^k a^l.$$

Основные определения

Определение:

Введем функцию

$$deg_1(x) = \begin{cases} k, x = a^k, \\ l, x = b^l, \end{cases}$$

Определение:

Введем функцию возвращающую вектор степени произвольного элемента бициклического моноида

$$deg_2(x) = (k, l), x = b^k a^l.$$

Определение:

Введем функцию *ext* которая возвращает число вхождений неизвестного x в слово. Например, для

$$w = c_1 x c_2 x c_3, \quad ext(w) = 2.$$

Общий вид уравнения

$$c_1 x c_2 x \dots x c_{k-1} x c_k = d_1 x d_2 x \dots x d_{k-1} x d_k$$

Основные вопросы

Основной вопрос 1:

Можно ли ограничить длину (степень) неизвестного слова для сужения поиска возможных решений ?

Основные вопросы

Основной вопрос 1:

Можно ли ограничить длину (степень) неизвестного слова для сужения поиска возможных решений ?

Основной вопрос 2:

Существует ли функция, зависящая от степеней констант уравнения в бициклическом моноиде B, дающая ответ о его разрешимости?

Уравнение

$$x^k = x$$

$x^k = x$

Теорема

Уравнение $x^k = x$ при $k > 0$ разрешимо тогда и только тогда, когда вектор степени x имеет равные координаты.

Уравнение

$$c_1 x c_2 \ldots c_{k-1} x c_k = e$$

$c_1 x c_2 \dots c_{k-1} x c_k = e$

Теорема

Если произведение элементов в бициклическом моноиде B равняется e, то первый элемент произведения равен a^n, а последний - b^m, где $m, n \in \{0, 1, \dots\}$.

$c_1 x c_2 \dots c_{k-1} x c_k = e$

Теорема

Если произведение элементов в бициклическом моноиде B равняется e, то первый элемент произведения равен a^n, а последний - b^m, где $m, n \in \{0, 1, \dots\}$.

Следствие

Если уравнение $c_1 x c_2 \dots c_{k-1} x c_k = e$ разрешимо и $c_1, c_k \neq e$, то $c_1 = a^n$ и $c_k = b^m$, где $m, n \in \{0, 1, \dots\}$.
Если же $c_1 = c_k = e$, уравнение принимает вид

$$x c_2 \dots c_{k-1} x = e,$$

то $x = e$ и $c_2 = a^n, \;\; c_{k-1} = b^m$ где $m, n \in \{0, 1, \dots\}$.

Уравнение

$$a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$$

$a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$

Теорема

Степень x в уравнении $a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$ ограничена сверху степенью элемента $w = b^n a^m$.

$a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$

Теорема

Степень x в уравнении $a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$ ограничена сверху степенью элемента $w = b^n a^m$.

Теорема

Пусть разрешимое уравнение $a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$ имеет чётное число вхождений x, оно примет вид

$$a^n x c_2 \dots x c_t x \dots c_{k-1} x b^m = e,$$

где c_t - константа, стоящая в середине уравнения. Тогда

$$\sum_{a \in c_i : i \leq t} deg_1(a) - \sum_{b \in c_i : i < t} deg_1(b) \geq \sum_{a \in c_i : i > t} deg_1(a) - \sum_{b \in c_i : i \geq t} deg_1(b).$$

$a^n x c_2 \ldots c_{k-1} x b^m = e$

Теорема

Обозначим левую часть уравнения $c_1 x c_2 \ldots c_{k-1} x c_k = e$ за Φ и $x = b^p a^q$, тогда если уравнение разрешимо, то

$$\sum_{a \in c_i : 1 \leq i \leq k} deg_1(a) - \sum_{b \in c_i : 1 \leq i \leq k} deg_1(b) = ext(\Phi)(p - q)$$

Уравнение

$$c_1 x c_2 x \dots x c_{k-1} x c_k = d$$

Уравнение

$$c_1 x c_2 x \dots x c_{k-1} x c_k = d$$

$$b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$$

$b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$

Теорема

Если уравнение $b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$ разрешимо, то $g \leq s$ и $u \leq t$.

$b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$

Теорема

Если уравнение $b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$ разрешимо, то $g \leq s$ и $u \leq t$.

Теорема

Если уравнение $b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$ удовлетворяет необходимому условию разрешимости, то вектор степени x имеет координаты, меньше либо равные соответствующим координатам вектора $(s + h - g, t + f - u)$.

$b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$

Теорема

Если в уравнении $b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$ $g < s$ и $u < t$., то его можно представить в виде $a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$, так, что оно будет удовлетворять необходимому условию разрешимости $a^n x c_2 \dots c_{k-1} x b^m = e$ сформулированному в следствии.

$b^g a^h x c_2 x \dots x c_{k-1} x b^f a^u = b^s a^t$

$$b^g a^h * x * b^f a^u = b^s a^t$$

$b^g a^h * x * b^f a^u = b^s a^t$

Теорема

Уравнение $b^g a^h * x * b^f a^u = b^s a^t$ разрешимо, если $g \leq s$ и $u \leq t$.

Уравнение

$$c_1xc_2x\dots xc_{k-1}xc_k = d_1xd_2x\dots xd_{k-1}xd_k$$

Уравнение

$$c_1xc_2x\ldots xc_{k-1}xc_k = d_1xd_2x\ldots xd_{k-1}xd_k$$

$$c_1xc_2 = d_1xd_2$$

Уравнение

$$c_1xc_2x\dots xc_{k-1}xc_k = d_1xd_2x\dots xd_{k-1}xd_k$$

$$c_1xc_2 = d_1xd_2$$

$$b^m a^n * x * b^c a^d = b^k a^l * x * b^g a^h$$

$b^m a^n * x * b^c a^d = b^k a^l * x * b^g a^h$

Теорема

Если уравнение $c_1 * x * c_2 = d_1 * x * d_2$ разрешимо, то вектор $deg_2(c_1 * c_2) - deg_2(d_1 * d_2)$ имеет одинаковые координаты.

Проблемы

Проблемы сводящиеся к решению уравнений в бициклическом моноиде

Проблема корня

Какую степень должно иметь слово в бициклическом моноиде B, чтобы из него извлекался корень, заданной степени?

Проблема корня

Теорема

Из $x = b^m a^n$ извлекается корень k степени тогда и только тогда когда

1. при $m > n$, $\exists p \in \mathbb{N} : p = \frac{m+(k-1)n}{k}$. Тогда $x = (b^{\frac{m+(k-1)n}{k}} a^n)^k$.
2. при $n > m$, $\exists q \in \mathbb{N} : q = \frac{n+(k-1)m}{k}$. Тогда $x = (b^m a^{\frac{n+(k-1)m}{k}})^k$.
3. При $m = n$ корень извлекается при любых значениях m, n и любой степени.

Проблема корня

Следствие

Пусть $x = b^m a^n$, тогда

1. если $m > n$, то из x извлекается корень максимальной степени $k = m - n$, а также извлекается корень степени всех делителей k.
2. если $n > m$, то из x извлекается корень максимальной степени $k = n - m$, а также извлекается корень степени всех делителей k.

Проблема сопряженности

Когда при заданных $w, u \in B$ существует $v : \quad v^{-1}wv = u$?

Проблема сопряженности

Теорема

Для элементов w, u бициклического моноида существует $v : v^{-1}wv = u \Leftrightarrow$, когда вектор разности степеней w и u имеет одинаковые координаты.

Проблема сопряженности

Алгоритм решающий проблему сопряженности

Вход: Произвольные элементы $w, u \in B$ представлены векторами с неотрицательными координатами (n, m) и (k, l) такими, что $w = b^n a^m, u = b^k a^l$.

Выход: $\begin{cases} (p, q) : v = b^p a^q, \ if \ \ \exists v : v^{-1} w v = u, \\ NO, \ if \ \ \nexists v : v^{-1} w v = u. \end{cases}$

Проверим на равенство разности $(n - k)$ и $(m - l)$. Если разности равны, ответ есть вектор степени $v = b^p a^q$, получаемый исходя из отношения между собой векторов (n, m) и (k, l). Если вектор (n, m) больше вектора (k, l), то на выход вектор $(n - k, 0)$, если меньше на выход вектор $(0, k - n)$, если вектора равны, то на выход вектор $(0, 0)$.
Если разности $(n - k)$ и $(m - l)$ не равны, то на выход NO.

Утверждение

Приведенный выше алгоритм работает корректно.

Заключение

Для некоторых видов уравнений получено ограничение на неизвестное слово.

Заключение

Для некоторых видов уравнений получено ограничение на неизвестное слово.

Для всех рассмотренных уравнений получены необходимые условия разрешимости.

Заключение

Для некоторых видов уравнений получено ограничение на неизвестное слово.

Для всех рассмотренных уравнений получены необходимые условия разрешимости.

Решена проблема корня.

Заключение

Для некоторых видов уравнений получено ограничение на неизвестное слово.

Для всех рассмотренных уравнений получены необходимые условия разрешимости.

Решена проблема корня.

Решена проблема сопряженности.

Спасибо за внимание