НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ ДЕЛИМЫХ ЖЁСТКИХ ГРУПП

Романовский Н.С.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

Омск, 26-30 сентября 2023 г.

Пусть в группе G имеется абелева нормальная подгруппа A. Тогда на A задаётся структура правого $\mathbb{Z}[G/A]$-модуля, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1 A) + \ldots + \alpha_n(g_n A) \in \mathbb{Z}[G/A]$$

на $a \in A$ определяется формулой $a^u = (a^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (a^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $a^{g_i} = g_i^{-1} a g_i$.

Группа G называется *m-жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \ldots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и, рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$-модули, не имеют модульного кручения.

Пусть в группе G имеется абелева нормальная подгруппа A. Тогда на A задаётся структура правого $\mathbb{Z}[G/A]$-модуля, действие элемента

$$u = \alpha_1(g_1A) + \ldots + \alpha_n(g_nA) \in \mathbb{Z}[G/A]$$

на $a \in A$ определяется формулой $a^u = (a^{g_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (a^{g_n})^{\alpha_n}$, здесь $a^{g_i} = g_i^{-1} a g_i$.

Группа G называется *m-жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \ldots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и, рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$-модули, не имеют модульного кручения.

Такой ряд называется жёстким, он определяется однозначно. Ступень разрешимости m-жёсткой группы в точности равна m. Важными примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения. Подгруппа жёсткой группы сама является жёсткой.

Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$ частных этого кольца.

Делимая жёсткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма размерностями α_i соответствующих векторных пространств $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, она обозначается через $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Такой ряд называется жёстким, он определяется однозначно. Ступень разрешимости m-жёсткой группы в точности равна m. Важными примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения. Подгруппа жёсткой группы сама является жёсткой.

Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ можно рассматривать как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$ частных этого кольца.

Делимая жёсткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма размерностями α_i соответствующих векторных пространств $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, она обозначается через $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Пусть $G \geqslant H$ — m-жёсткие группы, тогда жёсткий ряд H получается пересечением H с жёстким рядом G. Поэтому

$$\rho_i(H) = H \cap \rho_i(G),\ \rho_i(G)/\rho_{i+1}(G) \geqslant \rho_i(H)/\rho_{i+1}(H),$$

$$\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)] \geqslant \mathbb{Z}[H/\rho_i(H)].$$

Говорят, что подгруппа H независима в G, если любая система элементов из $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$, линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[H/\rho_i(H)]$, остаётся линейно независимой и над кольцом $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$. В этой ситуации можно говорить о коразмерности G над H, она представляет из себя набор кардинальных чисел $(d_1, \ldots, d_m)$, где d_i — коразмерность $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ над $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$.

Всякая m-жёсткая группа независимо вкладывается в делимую m-жёсткую группу.

Пусть $G \geqslant H$ — m-жёсткие группы, тогда жёсткий ряд H получается пересечением H с жёстким рядом G. Поэтому

$$\rho_i(H) = H \cap \rho_i(G),\ \rho_i(G)/\rho_{i+1}(G) \geqslant \rho_i(H)/\rho_{i+1}(H),$$

$$\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)] \geqslant \mathbb{Z}[H/\rho_i(H)].$$

Говорят, что подгруппа H независима в G, если любая система элементов из $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$, линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[H/\rho_i(H)]$, остаётся линейно независимой и над кольцом $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$. В этой ситуации можно говорить о коразмерности G над H, она представляет из себя набор кардинальных чисел $(d_1, \ldots, d_m)$, где d_i — коразмерность $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ над $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$.

Всякая m-жёсткая группа независимо вкладывается в делимую m-жёсткую группу.

Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $G_1 G_2 \ldots G_m$ абелевых групп G_i, здесь G_i нормализует G_j при $i \leq j$, и $\rho_i(G) = G_i G_{i+1} \ldots G_m$.

G_i равняется централизатору любого элемента $1 \neq g_i \in G_i$.

Делимая жёсткая группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых групп. Всякие два расщепления сопряжены элементом группы.

Если $G \geqslant H$ — делимые m-жёсткие группы, то всякое расщепление $H_1 H_2 \ldots H_m$ группы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $G_1 G_2 \ldots G_m$ группы G.

Группа $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при $\alpha_i \leq \omega$ счётна, а в другом случае её мощность равняется максимальному α_i.

История понятия: универсальная теория свободной метабелевой группы, алгебраическая геометрия и нётеровость по уравнениям, теория моделей.

Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $G_1 G_2 \dots G_m$ абелевых групп G_i, здесь G_i нормализует G_j при $i \le j$, и $\rho_i(G) = G_i G_{i+1} \dots G_m$.

G_i равняется централизатору любого элемента $1 \neq g_i \in G_i$.

Делимая жёсткая группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых групп. Всякие два расщепления сопряжены элементом группы.

Если $G \geqslant H$ — делимые m-жёсткие группы, то всякое расщепление $H_1 H_2 \dots H_m$ группы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $G_1 G_2 \dots G_m$ группы G.

Группа $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ при $\alpha_i \le \omega$ счётна, а в другом случае её мощность равняется максимальному α_i.

История понятия: универсальная теория свободной метабелевой группы, алгебраическая геометрия и нётеровость по уравнениям, теория моделей.

Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $G_1 G_2 \ldots G_m$ абелевых групп G_i, здесь G_i нормализует G_j при $i \leq j$, и $\rho_i(G) = G_i G_{i+1} \ldots G_m$.

G_i равняется централизатору любого элемента $1 \neq g_i \in G_i$.
Делимая жёсткая группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых групп. Всякие два расщепления сопряжены элементом группы.
Если $G \geqslant H$ — делимые m-жёсткие группы, то всякое расщепление $H_1 H_2 \ldots H_m$ группы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $G_1 G_2 \ldots G_m$ группы G.
Группа $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при $\alpha_i \leq \omega$ счётна, а в другом случае её мощность равняется максимальному α_i.
История понятия: универсальная теория свободной метабелевой группы, алгебраическая геометрия и нётеровость по уравнениям, теория моделей.

Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $G_1G_2\dots G_m$ абелевых групп G_i, здесь G_i нормализует G_j при $i \le j$, и $\rho_i(G) = G_iG_{i+1}\dots G_m$.

G_i равняется централизатору любого элемента $1 \neq g_i \in G_i$.

Делимая жёсткая группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых групп. Всякие два расщепления сопряжены элементом группы.

Если $G \geqslant H$ — делимые m-жёсткие группы, то всякое расщепление $H_1H_2\dots H_m$ группы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $G_1G_2\dots G_m$ группы G.

Группа $M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ при $\alpha_i \le \omega$ счётна, а в другом случае её мощность равняется максимальному α_i.

История понятия: универсальная теория свободной метабелевой группы, алгебраическая геометрия и нётеровость по уравнениям, теория моделей.

Жёсткая группа G называется *расщепляемой*, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $G_1 G_2 \ldots G_m$ абелевых групп G_i, здесь G_i нормализует G_j при $i \leq j$, и $\rho_i(G) = G_i G_{i+1} \ldots G_m$.

G_i равняется централизатору любого элемента $1 \neq g_i \in G_i$.

Делимая жёсткая группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых групп. Всякие два расщепления сопряжены элементом группы.

Если $G \geqslant H$ — делимые m-жёсткие группы, то всякое расщепление $H_1 H_2 \ldots H_m$ группы H согласовано с некоторым (единственным) расщеплением $G_1 G_2 \ldots G_m$ группы G.

Группа $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при $\alpha_i \leq \omega$ счётна, а в другом случае её мощность равняется максимальному α_i.

История понятия: универсальная теория свободной метабелевой группы, алгебраическая геометрия и нётеровость по уравнениям, теория моделей.

Ранг Морли, стабильность.

Рассматриваются группа (структура) G, аффинное пространство G^n, переменные $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $L \subseteq G^n$ — определимое подмножество, определяется формулой от X с параметрами из G. $\mathrm{RM}(L) =$ ординал или символ ∞.

Определение по индукции основано на постулате: если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\mathrm{RM}(L_i) \geq \alpha$, то $\mathrm{RM}(L) \geq \alpha + 1$.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Существует понятие степени Морли. Пусть $\mathrm{RM}(L) = \alpha$. Тогда $\deg(L) = d$, если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_d$, $\mathrm{RM}(L_i) = \alpha$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и d — максимально. Неприводимость.

Ранг Морли, стабильность.

Рассматриваются группа (структура) G, аффинное пространство G^n, переменные $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $L \subseteq G^n$ — определимое подмножество, определяется формулой от X с параметрами из G. $\mathrm{RM}(L) =$ ординал или символ ∞.

Определение по индукции основано на постулате: если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\mathrm{RM}(L_i) \geq \alpha$, то $\mathrm{RM}(L) \geq \alpha + 1$.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Существует понятие степени Морли. Пусть $\mathrm{RM}(L) = \alpha$. Тогда $\deg(L) = d$, если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_d$, $\mathrm{RM}(L_i) = \alpha$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и d — максимально. Неприводимость.

Ранг Морли, стабильность.

Рассматриваются группа (структура) G, аффинное пространство G^n, переменные $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $L \subseteq G^n$ — определимое подмножество, определяется формулой от X с параметрами из G. $\mathrm{RM}(L) =$ ординал или символ ∞.

Определение по индукции основано на постулате: если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\mathrm{RM}(L_i) \geq \alpha$, то $\mathrm{RM}(L) \geq \alpha + 1$.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Существует понятие степени Морли. Пусть $\mathrm{RM}(L) = \alpha$. Тогда $\deg(L) = d$, если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_d$, $\mathrm{RM}(L_i) = \alpha$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и d — максимально. Неприводимость.

Ранг Морли, стабильность.

Рассматриваются группа (структура) G, аффинное пространство G^n, переменные $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $L \subseteq G^n$ — определимое подмножество, определяется формулой от X с параметрами из G. $\mathrm{RM}(L) =$ ординал или символ ∞.

Определение по индукции основано на постулате: если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\mathrm{RM}(L_i) \geq \alpha$, то $\mathrm{RM}(L) \geq \alpha + 1$.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Существует понятие степени Морли. Пусть $\mathrm{RM}(L) = \alpha$. Тогда $\deg(L) = d$, если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_d$, $\mathrm{RM}(L_i) = \alpha$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и d — максимально. Неприводимость.

Ранг Морли, стабильность.

Рассматриваются группа (структура) G, аффинное пространство G^n, переменные $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $L \subseteq G^n$ — определимое подмножество, определяется формулой от X с параметрами из G. $\mathrm{RM}(L) =$ ординал или символ ∞.

Определение по индукции основано на постулате: если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\mathrm{RM}(L_i) \geq \alpha$, то $\mathrm{RM}(L) \geq \alpha + 1$.

Тотальная трансцендентность — $\mathrm{RM}(G) =$ ординал.

λ-стабильность, суперстабильность. ω-стабильность $=$ λ-стабильность при всех $\lambda =$ тотальная трансцендентность (в случае счётной сигнатуры).

Существует понятие степени Морли. Пусть $\mathrm{RM}(L) = \alpha$. Тогда $\deg(L) = d$, если $L \supseteq L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_d$, $\mathrm{RM}(L_i) = \alpha$, $L_i \cap L_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и d — максимально. Неприводимость.

Какие объекты теории групп оказались достаточно "хорошими"с точки зрения теории моделей?

Абелевы группы.

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас). Так Несин в 1989 году доказал, что коммутант связной разрешимой группы конечного ранга Морли нильпотентен. Баудиш и Уилсон высказали в 1992 году гипотезу, что это верно и для ω-стабильных групп.

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Какие объекты теории групп оказались достаточно "хорошими"с точки зрения теории моделей?

Абелевы группы.

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас). Так Несин в 1989 году доказал, что коммутант связной разрешимой группы конечного ранга Морли нильпотентен. Баудиш и Уилсон высказали в 1992 году гипотезу, что это верно и для ω-стабильных групп.

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиперболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Какие объекты теории групп оказались достаточно "хорошими"с точки зрения теории моделей?

Абелевы группы.

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас). Так Несин в 1989 году доказал, что коммутант связной разрешимой группы конечного ранга Морли нильпотентен. Баудиш и Уилсон высказали в 1992 году гипотезу, что это верно и для ω-стабильных групп.

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Какие объекты теории групп оказались достаточно "хорошими"с точки зрения теории моделей?

Абелевы группы.

Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.

Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас). Так Несин в 1989 году доказал, что коммутант связной разрешимой группы конечного ранга Морли нильпотентен. Баудиш и Уилсон высказали в 1992 году гипотезу, что это верно и для ω-стабильных групп.

Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Какие объекты теории групп оказались достаточно "хорошими"с точки зрения теории моделей?
Абелевы группы.
Алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Здесь всё сводится к теории а.з. полей.
Группы конечного ранга Морли, они оказались близки к алгебраическим группам (Черлин, Зильбер, Боровик, Томас). Так Несин в 1989 году доказал, что коммутант связной разрешимой группы конечного ранга Морли нильпотентен. Баудиш и Уилсон высказали в 1992 году гипотезу, что это верно и для ω-стабильных групп.
Свободные группы. После решения проблем Тарского о свободных группах (Мясников и Харлампович, Села) активно изучается теория моделей свободных групп и близких к ним. Села в 2013 г. доказал, что теория свободной группы, как и гиберболической группы без кручения стабильна, этот результат высоко оценивается в теории моделей. Ранее Пуаза показал, что теория свободной группы не суперстабильна.

Делимые жёсткие группы. В работах автора и совместных работах с А.Г.Мясниковым исследовались различные аспекты теории делимых m-жёстких групп (эта теория обозначается через $\mathfrak{T}_m$) и теории делимых m-жёстких групп, содержащих в качестве независимой подгруппы данную счётную делимую m-жёсткую группу M, в сигнатуре, расширенной константами из M (обозначается через $\mathfrak{T}_m(M)$). Были найдены рекурсивные системы аксиом для каждой из этих теорий, доказаны полнота, ω-стабильность, описаны элементарные подмодели в моделях теорий, описаны определимые подгруппы, получена элиминация кванторов до булевой комбинации $\forall\exists$-формул и др. Отметим, что насыщенная в бесконечной мощности λ модель теории $\mathfrak{T}_m$ имеет вид $M(\lambda, \ldots, \lambda)$.

Обзор по алгебраической геометрии и теории моделей жёстких групп можно найти в монографии: Groups and model theory. GAGTA book 2. De Gruyter, 2021 (авторы глав: Пиллей, Склинос, Мясников, Харлампович, Сохраби, Романовский).

Делимые жёсткие группы. В работах автора и совместных работах с А.Г.Мясниковым исследовались различные аспекты теории делимых m-жёстких групп (эта теория обозначается через $\mathfrak{T}_m$) и теории делимых m-жёстких групп, содержащих в качестве независимой подгруппы данную счётную делимую m-жёсткую группу M, в сигнатуре, расширенной константами из M (обозначается через $\mathfrak{T}_m(M)$). Были найдены рекурсивные системы аксиом для каждой из этих теорий, доказаны полнота, ω-стабильность, описаны элементарные подмодели в моделях теорий, описаны определимые подгруппы, получена элиминация кванторов до булевой комбинации $\forall\exists$-формул и др. Отметим, что насыщенная в бесконечной мощности λ модель теории $\mathfrak{T}_m$ имеет вид $M(\lambda, \ldots, \lambda)$.
Обзор по алгебраической геометрии и теории моделей жёстких групп можно найти в монографии: Groups and model theory. GAGTA book 2. De Gruyter, 2021 (авторы глав: Пиллей, Склинос, Мясников, Харлампович, Сохраби, Романовский).

Из доказанных ранее фактов подробно сформулируем следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) *Подмодель H модели G теории $\mathfrak{T}_m$ или теории $\mathfrak{T}_m(M)$ является элементарной тогда и только тогда H — независимая подгруппа в G.*
2) *Пересечение некоторого множества элементарных подмоделей теории $\mathfrak{T}_m$ является элементарной подмоделью тогда и только тогда, когда оно имеет ступень разрешимости m.*
3) *Пересечение любого множества элементарных подмоделей теории $\mathfrak{T}_m(M)$ снова является элементарной подмоделью.*

В частности, если некоторое подмножество A делимой m-жёсткой группы G порождает m-ступенно разрешимую группу, то можно говорить об элементарном замыкании A в G.

Приведём необходимые определения и свежий результат, связанные с теоретико модельным понятием алгебраичности. Пусть A — непустое подмножество в группе G. Элемент $g \in G$ называется определимым (алгебраическим), если найдётся формула $\varphi(x)$ от одной несвязанной переменной с параметрами из A, множество решений которой равно $\{g\}$ (конечно и содержит g). Множество всех определимых (алгебраических) над A элементов из G называется определимым (алгебраическим) замыканием A и обозначается $dcl(A)$ ($acl(A)$). Выполняются обычные для замыканий свойства. Очевидно, то и другое замыкания являются подгруппами в G.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — подмножество делимой m-жёсткой группы G и подгруппа $\langle A \rangle$ имеет ступень разрешимости m.* Тогда $dcl(A)$ является делимой подгруппой (но не обязательно совпадает с делимым замыканием A), а $acl(A)$ совпадает с элементарным замыканием множества A в G.

Приведём необходимые определения и свежий результат, связанные с теоретико модельным понятием алгебраичности. Пусть A — непустое подмножество в группе G. Элемент $g \in G$ называется определимым (алгебраическим), если найдётся формула $\varphi(x)$ от одной несвязанной переменной с параметрами из A, множество решений которой равно $\{g\}$ (конечно и содержит g). Множество всех определимых (алгебраических) над A элементов из G называется определимым (алгебраическим) замыканием A и обозначается $dcl(A)$ ($acl(A)$). Выполняются обычные для замыканий свойства. Очевидно, то и другое замыкания являются подгруппами в G.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — подмножество делимой m-жёсткой группы G и подгруппа $\langle A \rangle$ имеет ступень разрешимости m.* Тогда $dcl(A)$ является делимой подгруппой (но не обязательно совпадает с делимым замыканием A), а $acl(A)$ совпадает с элементарным замыканием множества A в G.

Делимые m-жёсткие группы при $m \geq 3$ служат контрпримерами к гипотезе Баудиша-Уилсона, поэтому, например, их ранги Морли не конечны. Дальше в докладе рассматриваются задачи точного вычисления ранга Морли определимых множеств над делимой m-жёсткой группой. В случае $m = 1$ имеем дело с абелевыми делимыми группами без кручения, ранг Морли которых равен 1. Автор сначала доказал, что ранг Морли делимой 2-ступенно разрешимой группы равен $\omega + 1$. Сформулируем полученные на настоящий момент результаты и общую гипотезу.

Мы говорили, что делимая m-жёсткая группа G расщепляется в полупрямое произведение $G_1 G_2 \ldots G_m$ абелевых подгрупп. Все подгруппы данного расщепления определимы в G. Если зафиксировано расщепление, то удобно в формулах вместо обычных переменных рассматривать специальные. В общем случае это будет таблица $X = (x_{ij})$, составленная из m столбцов высоты $n_1, \ldots, n_m$, предполагается, что элементы j-го столбца принимают значения в G_j. В качестве аффинного пространства для этих переменных надо рассматривать $G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$.

Сопоставим каждому набору $(n_1, \ldots, n_m)$ неотрицательных целых чисел ординал

$$\alpha = \omega^{m-1} n_m + \ldots + \omega n_2 + n_1$$

(в таком виде представляется любой ординал, меньший ω^m) и обозначим через $G^{(\alpha)}$ упомянутое выше множество $G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$, которое, очевидно, определимо над G в $G^{n_1+\ldots+n_m}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — счётная насыщенная модель теории $\mathfrak{T}_m$ и зафиксировано её расщепление $G_1 G_2 \ldots G_m$ в полупрямое произведение абелевых подгрупп. Тогда ранг Морли множества*

$$G^{(\alpha)} = G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$$

равен α.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathrm{RM}(G) = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \ldots + 1$.

В процессе доказательства получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество $G^{(\alpha)}$ неприводимо по Морли ($\deg(G^{(\alpha)}) = 1$), то есть, если оно представляется в виде объединения двух непересекающихся определимых подмножеств, то ранг Морли одного из этих подмножеств равен α, а другого строго меньше α.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — счётная насыщенная модель теории $\mathfrak{T}_m$ и зафиксировано её расщепление $G_1 G_2 \ldots G_m$ в полупрямое произведение абелевых подгрупп. Тогда ранг Морли множества*

$$G^{(\alpha)} = G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$$

равен α.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathrm{RM}(G) = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \ldots + 1.$

В процессе доказательства получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество $G^{(\alpha)}$ неприводимо по Морли ($\deg(G^{(\alpha)}) = 1$), то есть, если оно представляется в виде объединения двух непересекающихся определимых подмножеств, то ранг Морли одного из этих подмножеств равен α, а другого строго меньше α.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — счётная насыщенная модель теории $\mathfrak{T}_m$ и зафиксировано её расщепление $G_1 G_2 \ldots G_m$ в полупрямое произведение абелевых подгрупп. Тогда ранг Морли множества*

$$G^{(\alpha)} = G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$$

равен α.

СЛЕДСТВИЕ. $\mathrm{RM}(G) = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \ldots + 1.$

В процессе доказательства получается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Множество $G^{(\alpha)}$ неприводимо по Морли ($\deg(G^{(\alpha)}) = 1$), то есть, если оно представляется в виде объединения двух непересекающихся определимых подмножеств, то ранг Морли одного из этих подмножеств равен α, а другого строго меньше α.*

Далее планируется понять: как можно вычислять ранг Морли произвольного определимого неприводимого по Морли подмножества из $G^{(\alpha)}$.

О типах. Рассматривается наша группа G, расщепление $G_1 G_2 \dots G_m$ и набор специальных переменных X. Тип $p(X)$ над G: совместимое множество $(\Phi_i(X) \mid i \in I)$ формул с параметрами из G. Полный тип: любая формула $\Phi(X)$ или отрицание $\neg\Phi(X)$ лежит в p. Всякий тип вкладывается в полный. Пусть $G \prec H$ и $X = B$ — набор значений переменных в H.Тип $tp_G(B)$ — полный, он реализуется набором B. Всякий полный тип над G имеет вид $tp_G(B)$. Монстр-модель $G \prec \mathbb{G}$ — достаточно большая насыщенная модель, в ней реализуются все полные типы над G.

Далее планируется понять: как можно вычислять ранг Морли произвольного определимого неприводимого по Морли подмножества из $G^{(\alpha)}$.

О типах. Рассматривается наша группа G, расщепление $G_1 G_2 \dots G_m$ и набор специальных переменных X. Тип $p(X)$ над G: совместимое множество $(\Phi_i(X) \mid i \in I)$ формул с параметрами из G. Полный тип: любая формула $\Phi(X)$ или отрицание $\neg\Phi(X)$ лежит в p. Всякий тип вкладывается в полный. Пусть $G \prec H$ и $X = B$ — набор значений переменных в H.Тип $tp_G(B)$ — полный, он реализуется набором B. Всякий полный тип над G имеет вид $tp_G(B)$. Монстр-модель $G \prec \mathbb{G}$ — достаточно большая насыщенная модель, в ней реализуются все полные типы над G.

Пусть $G = M(\aleph_0, \ldots, \aleph_0)$ — счётная насыщенная модель теории $\mathfrak{T}_m$ делимых m-жёстких групп и она независимо (элементарно) вложена в монстр-модель $\mathbb{G}$, в качестве последней можно понимать $M(\lambda, \ldots, \lambda)$, где $\lambda > \aleph_0$. Зафиксируем расщепление $G_1 G_2 \ldots G_m$ для G и согласованное расщепление $\mathbb{G}_1 \mathbb{G}_2 \ldots \mathbb{G}_m$ для $\mathbb{G}$, то есть $G_i = G \cap \mathbb{G}_i$. Специальные переменные будут связаны с выбранными расщеплениями.

Рассматривается аффинное пространство $G^{(\alpha)} = G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots \times G_m^{n_m}$ и определимые в нём подмножества. Два определимых (с параметрами из G) неприводимых по Морли подмножества назовём *соизмеримыми*, если их ранги Морли и ранг Морли пересечения равны.

Соизмеримость является отношением эквивалентности, поэтому совокупность всех определимых неприводимых по Морли подмножеств из $G^{(\alpha)}$ разбивается на классы соизмеримых множеств. Пусть L — одно из таких множеств, через $[L]$ обозначим соответствующий класс. Множество всех формул $\Phi(X)$ с параметрами из G, для которых $\Phi(G^{(\alpha)}) \cap L \in [L]$ образует полный тип p_L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) $p_{L_1} = p_{L_2} \Leftrightarrow [L_1] = [L_2]$.
(2) *Пусть p — полный тип с параметрами из G, какая-то минимальная формула которого определяет неприводимое по Морли множество $L \subseteq G^{(\alpha)}$. Тогда $p = p_L$.*

Данный тип p_L от набора специальных переменных X реализуется как $tp(\overline{X})$, где $\overline{X} \in \mathbb{G}^{(\alpha)}$. Назовём $\overline{X}$ общей точкой класса $[L]$. Наша цель — вычислить ранг Морли множества L (типа p_L) исходя из общей точки.

Соизмеримость является отношением эквивалентности, поэтому совокупность всех определимых неприводимых по Морли подмножеств из $G^{(\alpha)}$ разбивается на классы соизмеримых множеств. Пусть L — одно из таких множеств, через $[L]$ обозначим соответствующий класс. Множество всех формул $\Phi(X)$ с параметрами из G, для которых $\Phi(G^{(\alpha)}) \cap L \in [L]$ образует полный тип p_L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) $p_{L_1} = p_{L_2} \Leftrightarrow [L_1] = [L_2]$.
(2) *Пусть p — полный тип с параметрами из G, какая-то минимальная формула которого определяет неприводимое по Морли множество $L \subseteq G^{(\alpha)}$. Тогда $p = p_L$.*

Данный тип p_L от набора специальных переменных X реализуется как $tp(\overline{X})$, где $\overline{X} \in \mathbb{G}^{(\alpha)}$. Назовём $\overline{X}$ общей точкой класса $[L]$. Наша цель — вычислить ранг Морли множества L (типа p_L) исходя из общей точки.

Соизмеримость является отношением эквивалентности, поэтому совокупность всех определимых неприводимых по Морли подмножеств из $G^{(\alpha)}$ разбивается на классы соизмеримых множеств. Пусть L — одно из таких множеств, через $[L]$ обозначим соответствующий класс. Множество всех формул $\Phi(X)$ с параметрами из G, для которых $\Phi(G^{(\alpha)}) \cap L \in [L]$ образует полный тип p_L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) $p_{L_1} = p_{L_2} \Leftrightarrow [L_1] = [L_2]$.
(2) *Пусть p — полный тип с параметрами из G, какая-то минимальная формула которого определяет неприводимое по Морли множество $L \subseteq G^{(\alpha)}$. Тогда $p = p_L$.*

Данный тип p_L от набора специальных переменных X реализуется как $tp(\overline{X})$, где $\overline{X} \in \mathbb{G}^{(\alpha)}$. Назовём $\overline{X}$ общей точкой класса $[L]$. Наша цель — вычислить ранг Морли множества L (типа p_L) исходя из общей точки.

ГИПОТЕЗА. *Пусть* $p = p_L$ *— полный тип с параметрами из* G *в специальных переменных* X*, определяющий некоторый класс* $[L]$ *неприводимых по Морли соизмеримых множеств, и* $\overline{X}$ *— общая точка этого типа. Обозначим через* F *элементарное замыкание в* $\mathbb{G}$ *множества* $G \cup \overline{X}$*, то есть пересечение всех независимых (элементарных) подгрупп из* $\mathbb{G}$*, содержащих* $G \cup \overline{X}$*. Известно, что коразмерность* F *над* G *конечна, то есть она представляет из себя набор* $(d_1, \ldots, d_m)$ *неотрицательных целых чисел. Тогда ранг Морли типа* p *равен ординалу* $\omega^{m-1} d_m + \ldots + \omega d_2 + d_1$*.*

При $m = 1$ доказательство гипотезы не составляет особого труда.
Мы анонсируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Гипотеза верна в 2-ступенно разрешимом случае, т.е. при* $m = 2$.

Общее утверждение будет иметь ряд важных следствий.

ПРОБЛЕМА. *Описать метабелевы* ω*-стабильные группы бесконечного ранга Морли.*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

При $m = 1$ доказательство гипотезы не составляет особого труда.
Мы анонсируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Гипотеза верна в 2-ступенно разрешимом случае, т.е. при $m = 2$.*

Общее утверждение будет иметь ряд важных следствий.

ПРОБЛЕМА. *Описать метабелевы ω-стабильные группы бесконечного ранга Морли.*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

При $m = 1$ доказательство гипотезы не составляет особого труда.
Мы анонсируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Гипотеза верна в 2-ступенно разрешимом случае, т.е. при $m = 2$.*

Общее утверждение будет иметь ряд важных следствий.

ПРОБЛЕМА. *Описать метабелевы ω-стабильные группы бесконечного ранга Морли.*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!