Определимые подгруппы в нильпотентных группах

А. Трейер

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

«Комбинаторно-вычислительные методы алгебры и логики», 28 сентября, 2023, Омск, Россия

Фото

Определимость подгрупп

A.Miasnikov, A.Treyer *Definable subgroups in nilpotent groups* (in preparation)

Определимость подгрупп

A.Miasnikov, A.Treyer *Definable subgroups in nilpotent groups* (in preparation)

Подгруппа H группы G *определима* если существует формула $\phi(x)$ в языке теории групп такая, что для любого элемента $g \in G$ имеем:

$$g \in H \Longleftrightarrow G \models \phi(g).$$

Если формула ϕ содержит параметры из G, тогда H *определима с параметрами*, если ϕ не содержит параметров, то H *абсолютно определима* или 0-определима.

Примеры

$$Z(x) : \forall y[x, y] = 1$$

Примеры

$$Z(x) : \forall y [x, y] = 1$$

$$p(x) : x^p = 1 \quad (px = 0)$$

$$P(x) : \exists y \; x = y^p \quad (x = py)$$

Примеры

$$Z(x) : \forall y [x, y] = 1$$

$$p(x) : x^p = 1 \quad (px = 0)$$

$$P(x) : \exists y \ x = y^p \quad (x = py)$$

$$C_g(x) : [x, g] = 1$$

Примеры

$$Z(x) : \forall y [x, y] = 1$$

$$p(x) : x^p = 1 \quad (px = 0)$$

$$P(x) : \exists y \; x = y^p \quad (x = py)$$

$$C_g(x) : [x, g] = 1$$

Любая конечная подгруппа определима формулой с параметрами – элементами этой группы.

Примеры

$$Z(x) : \forall y [x, y] = 1$$

$$p(x) : x^p = 1 \quad (px = 0)$$

$$P(x) : \exists y \; x = y^p \quad (x = py)$$

$$C_g(x) : [x, g] = 1$$

Любая конечная подгруппа определима формулой с параметрами – элементами этой группы.
Пересечение, произведение определимых подгрупп определимо.

Определимые подгруппы абелевых групп.

Согласно элиминации кванторов Бауэра-Монка для модулей, имеем что любая формула первого порядка теории абелевых групп T_{ab} эквивалентна булевой комбинации позитивно примитивных формул.

Формула $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ позитивно примитивна, если она эквивалентна формуле следующего вида ($c_k = 0$ для п.п. формул без параметров и $c_k \in A$ для п.п. формул с параметрами)

$$\exists y_1, \ldots, y_n \bigwedge_k (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i=j}^{n} b_j y_j = c_k), \qquad (1)$$

где k, a_i, b_j целые числа.

Лемма Прюфера

Lemma

Каждая п.п. формула без параметров $\phi(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}_{ab}$ эквивалентна по модулю T_{ab} конечной конъюнкции формул вида '$t(\overline{x}) = 0$' где $t(\overline{x})$ это терм, и '$p^n|t(\overline{x})$' где $t(\overline{x})$ терм, p простое и n натуральное число. Более того, '$p^n|t(x)$' (с одной переменной x) эквивалентна по модулю T_{ab} либо $0 = 0$ или формуле '$p^n|p^m x$,' где $0 \leq m < n$.

Лемма Прюфера

Lemma

Каждая п.п. формула без параметров $\phi(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}_{ab}$ эквивалентна по модулю T_{ab} конечной конъюнкции формул вида '$t(\overline{x}) = 0$' где $t(\overline{x})$ это терм, и '$p^n | t(\overline{x})$' где $t(\overline{x})$ терм, p простое и n натуральное число. Более того, '$p^n | t(x)$' (с одной переменной x) эквивалентна по модулю T_{ab} либо $0 = 0$ или формуле '$p^n | p^m x$,' где $0 \leq m < n$.

Можно заключить, что единственные определимые с помощью позитивно примитивных формул собственные подгруппы это подгруппы вида $kA + A[l]$.

Лемма Прюфера

Lemma

Каждая п.п. формула без параметров $\phi(\overline{x})$ языка $\mathcal{L}_{ab}$ эквивалентна по модулю T_{ab} конечной конъюнкции формул вида '$t(\overline{x}) = 0$' где $t(\overline{x})$ это терм, и '$p^n | t(\overline{x})$' где $t(\overline{x})$ терм, p простое и n натуральное число. Более того, '$p^n | t(x)$' (с одной переменной x) эквивалентна по модулю T_{ab} либо $0 = 0$ или формуле '$p^n | p^m x$,' где $0 \leq m < n$.

Можно заключить, что единственные определимые с помощью позитивно примитивных формул собственные подгруппы это подгруппы вида $kA + A[l]$.
Но ничего не меняется, если мы рассматриваем п.п. формулы с параметрами!

Абелевы группы. Случай конечнопорожденных групп.

По структурной теореме для конечнопорожденных абелевых групп

$$A = \mathbb{Z}^n \oplus T(A)$$

Theorem

Пусть A к.п. абелева группа. Тогда с помощью формул с параметрами определимы только конечные подгруппы и подгруппы конечного индекса группы A.

Абелевы группы. Случай конечнопорожденных групп.

По структурной теореме для конечнопорожденных абелевых групп

$$A = \mathbb{Z}^n \oplus T(A)$$

Theorem

Пусть A к.п. абелева группа. Тогда с помощью формул с параметрами определимы только конечные подгруппы и подгруппы конечного индекса группы A.

Corollary

Любая подгруппа определима в бесконечной циклической группе $\mathbb{Z}$, но не существует одной формулы с параметрами, определяющей все подгруппы в $\mathbb{Z}$

Нильпотентные группы. Общие результаты об определимости подгрупп

Lemma

Пусть G к.п. нильпотентная группа. Тогда каждая вербальная подгруппа определима без параметров в G.

Нильпотентные группы. Общие результаты об определимости подгрупп

Lemma

Пусть G к.п. нильпотентная группа. Тогда каждая вербальная подгруппа определима без параметров в G.

Lemma

Пусть G к.п. нильпотентная группа. Тогда все конечные подгруппы и все подгруппы конечного индекса определимы с параметрами в G.

Нильпотентные группы. Общие результаты об определимости подгрупп

Lemma

Пусть G к.п. нильпотентная группа. Тогда каждая вербальная подгруппа определима без параметров в G.

Lemma

Пусть G к.п. нильпотентная группа. Тогда все конечные подгруппы и все подгруппы конечного индекса определимы с параметрами в G.

Corollary

Пусть G к.п. нильпотентная группа и A определимая подгруппа в G. Тогда все подгруппы конечного индекса в A определимы в G.

0-определимые подгруппы свободных нильпотентных групп

Обозначим через D класс всех 0-определимых подгрупп группы F, а через V класс всех вербальных подгрупп группы F.
По лемме выше $V \subseteq D$.
Также отметим, что все 0-определимые подгруппы стабильны относительно любого группового автоморфизма. Следовательно, если C — класс всех характеристических подгрупп группы F, то

$$V \subseteq D \subseteq C$$

По теореме Vaughan-Lee (1970) любая характеристическая подгруппа свободной нильпотентной группы ранга $r > k$ также является fully-invariant subgroup (вполне инвариантной, то есть устойчивой к эндоморфизмам).

Для нильпотеных групп понятия вербальной подгруппы и вполне инвариантной подгруппы совпадают.

Для нильпотеных групп понятия вербальной подгруппы и вполне инвариантной подгруппы совпадают.

Theorem

Пусть F свободная нильпотентная группа класса k и конечного ранга r и $r > k$. Пусть B 0-определимая подгруппа в F, тогда B это вербальная подгруппа F.

Определимость с параметрами

Какие подгруппы определимы с параметрами в свободной 2-нильпотентной к.п. группе?

Лемма

Пусть B определимая с параметрами подгруппа группы F с помощью формулы $\phi_B(x)$ и B содержит нецентральный элемент. Тогда существует множество нецентральных элементов $B_N \subseteq B$ такие что для любого $b \in B_N$ множества $\{b \cdot x' | x' \in [F, F]k_b\}$ также удовлетворяет $\phi_B(x)$ для некоторого ненулевого целого k_b.

Следствия

Пусть теперь F — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения.
Из леммы выше есть несколько следствий, не связанных явно с вопросом, какие группы определимы в группе F.

Следствия

Пусть теперь F — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения.
Из леммы выше есть несколько следствий, не связанных явно с вопросом, какие группы определимы в группе F.

Эти результаты связаны с теоретико-модельными понятиями богатства, свойства равномерной определимости и биинтерпретируемости.

Corollary

Пусть $a \in F$ и a нецентральный элемент группы F. Тогда подгруппа порожденная a не определима с параметрами в логике первого порядка.

Равномерная определимость

Группу назовем удовлетворяющей свойству равномерной определимости подгрупп, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует формула с параметрами $\phi_n(x_1, \ldots, x_n, x, \overline{y})$ такая, что $F \models \phi_n(b_1, \ldots, b_n, a, \overline{y(b_1, \ldots, b_n)})$ тогда и только тогда, когда $a \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Из вышесказанного, имеем:

Равномерная определимость

Группу назовем удовлетворяющей свойству равномерной определимости подгрупп, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует формула с параметрами $\phi_n(x_1, \ldots, x_n, x, \overline{y})$ такая, что $F \models \phi_n(b_1, \ldots, b_n, a, \overline{y(b_1, \ldots, b_n)})$ тогда и только тогда, когда $a \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Из вышесказанного, имеем:

Corollary

Группа F не удовлетворяет свойству равномерной определимости подгрупп.

Богатость

Понятие богатства или так называемой богатой структуры тесно связано с понятием равномерной определимости. Коротко говоря, алгебраическая структура A над языком Ł называется богатой, если для любой формулы слабой формулы второго порядка существует формула первого порядка, такая что эти формулы эквивалентны.

Поскольку все группы удовлетворяют свойству равномерной определимости в слабой логике второго порядка, то свойство богатства влечет свойство равномерной определимости для группы в логике первого порядка.

Corollary

Группа F не является богатой алгебраической системой.

Би-интерпретируемость

Назовем две алгебраические системы A и B (возможно разных языков) биинтерпретируемыми друг с другом, если A интерпретируется в B, а B интерпретируется в A и интерпретация A в A через B определима, как и интерпретация B в B через A тоже определима. Известно, что кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является богатым кольцом и все, что биинтерпретируемо с параметрами с $\mathbb{Z}$, также является богатой структурой. Тогда мы получим следующий результат:

Corollary

Группа F не является би-интерпретируемой с параметрамии с кольцом целых чисел.

Theorem

Пусть B определимая с параметрами подгруппа F. Тогда B произвольная подгруппа $[F,F]$ или

$$B = B_1 B_2,$$

для подгрупп B_1, B_2 таких, что:

1. *существует базис $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ группы F такой что $B_1 = \langle b_1, \dots b_m \rangle \cdot [F,F]^l$, где $b_i = a_i^{\varepsilon_i},\ i = 1, \dots, k$;*
2. *B_2 произвольная подгруппа $[F,F]$;*