Геодезические и кратчайшие субримановых метрик на группах Ли $\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$ с трехмерными порождающими распределениями

Зубарева И.А.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал

Международная конференция КВМАЛ

г. Омск, 30 сентября 2023

Актуальные приложения и задачи субримановой геометрии, возникшие из разных областей науки:

1) задачи о машинах с прицепами (B. Bryant, F. Jean, J.P. Laumond, W. Liu and H.J. Sussman, P. Rouchon, M. Fliess и др.);

2) проблемы перемещения масс (C. Villani, B. Khesin и P. Lee);

3) робототехника (A. Bloch);

4) траектории летательных аппаратов (А.А. Ардентов, И.Ю. Бесчастный, А.П. Маштаков, Ю.Л. Сачков, В.И. Гурман и др.);

5) движение самопропульсирующих микроорганизмов и палающих кошек (R. Montgomery);

6) квантовое управление (L. Accardi, A. Pechen и I.V. Volovich, M.D. Grace, J. Dominy и др.);

7) термодинамика черных дыр (C. Udriste, V. Ciancio, F. Farsaci, M. Anastaseei, S.I. Vacaru);

8) астродинамика (J.K. Whiting);

9) экономика (D.G. Hobson, L.G. Rogers, A. Pascucci, P. Foschi);

10) нейробиология (математические модели работы человеческого мозга) (A. Field, A. Heyes, W.C. Hoffman, J. Petitot и др.)

M — гладкое многообразие, Δ — гладкое распределение на M:

$$\Delta = \{\Delta_q \subset T_qM \mid q \in M\}, \quad \dim\Delta_q = \mathrm{const}.$$

Δ вполне неголономно: $\forall q \in M$ векторные поля, принадлежащие Δ_q, вместе со всеми своими коммутаторами порождают T_qM.

Зададим на Δ скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \{\langle\cdot,\cdot\rangle_q - \text{скалярное произведение в } \Delta_q \mid q \in M\}.$$

Липшицева кривая $g(t)$, $t \in [0, t_1]$, на M горизонтальна, если $\dot{g}(t) \in \Delta_{g(t)}$ для почти всех $t \in [0, t_1]$.

Субриманова длина горизонтальной кривой $g(t)$, $t \in [0, t_1]$:

$$l(g(\cdot)) = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{\langle \dot{g}(t), \dot{g}(t)\rangle} dt.$$

Субриманово расстояние между точками $p, q \in M$:

$$d(p,q) = \inf\{l(g(\cdot)) \mid g(\cdot) \text{горизонтальна } , g(0) = p, \ g(t_1) = q\}.$$

$M = G$ — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $(\Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — левоинвариантная субриманова структура. Существует глобальный ортонормированный репер левоинвариантных векторных полей

$$X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}, \quad k = \dim \Delta_q,$$

$$\Delta_q = \mathrm{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)),$$

$$\langle X_i(q), X_j(q) \rangle = \delta_{ij}, \ i, j = 1, \dots, k, \quad q \in G.$$

Липшицева кривая $g(t)$, $t \in [0, t_1]$, на M допустима для Δ, если $\dot{g}(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i(t) X_i(g(t))$ для некоторых управлений $u_i \in \mathrm{L}^\infty([0, t_1])$. Субриманова длина допустимой кривой $g(t)$, $t \in [0, t_1]$:

$$l(g(\cdot)) = \int\limits_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2(t) \right)^{1/2} dt.$$

Субриманова кратчайшая — решение задачи опт. управления

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^{k} u_i X_i(g), \quad g \in G, \quad u \in \mathbb{R}^k,$$

$$g(0) = g_0, \quad g(t_1) = g_1, \quad l(g(\cdot)) = \int_0^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^2(t) \right)^{1/2} dt \to \min.$$

Пусть $X_i(e) := e_i$, $i = 1, \dots, k$, — ортонормированный базис в $\Delta(e) \subset \mathfrak{g}$, $e_1, \dots, e_n$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$; C_{ij}^m — структурные константы в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Теорема. Каждая нормальная геодезическая левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли G с началом в единице, параметризованная длиной дуги, является решением системы ДУ

$$\dot{g}(t) = dl_{g(t)}(u(t)), \quad u(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t) e_i, \quad |u(0)| = 1,$$

$$\dot{u}_j(t) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} C_{ij}^m u_i(t) u_m(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$

$$\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}: \quad [E_1, E_2] = -E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2,$$

$$[E_i, E_4] = 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Предложение 1.

Трехмерное подпространство $\mathfrak{q}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$ порождает $\mathfrak{g}$ (операцией скобки $[\cdot, \cdot]$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{so}(2,1)$ и проекция $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{so}(2,1)$ вдоль $\mathbb{R}$ не является двумерной подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)$. Существует пять неэквивалентных классов эквивалентных, т.е. переводимых друг в друга автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, таких подпространств.

$$\mathfrak{q}_1 = \mathrm{span}\{E_1, E_4 - E_3, E_2\},\ \mathfrak{q}_2 = \mathrm{span}\{E_1, E_4, E_2\},\ \mathfrak{q}_3 = \mathrm{span}\{E_1, E_4, E_3\},$$

$$\mathfrak{q}_4 = \mathrm{span}\{E_1, E_4 - E_2, E_3\}, \quad \mathfrak{q}_5 = \mathrm{span}\{E_4 + (E_2 - E_3)/2, E_2 + E_3, E_1\}.$$

$\mathfrak{so}(2,1)$ — единственная трехмерная алгебра Ли, односвязная группа Ли $\tilde{A}$ которой не имеет линейного представления.

Всякая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2,1)$ либо изоморфна односвязной группе Ли $\tilde{A}$, либо есть n–листное покрытие A_n укороченной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(2,1)$, $n \geq 1$. При этом двулистное покрытие A_2 изоморфно специальной линейной группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, четырехлистное покрытие A_4 изоморфно метаплектической группе $M_p(2,\mathbb{R})$.

Существует шесть типов связных групп Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$.

1) односвязная группа Ли $\tilde{A} \times \mathbb{R}$;

2) n–листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/\exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3) \cong A_n \times \mathbb{R}$ группы $SO_0(2,1) \times \mathbb{R}$;

3) группа $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/\exp(\mathbb{Z}E_4) \cong \tilde{A} \times \mathbb{T}$;

4) n–листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/\exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3 + E_4))$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/\exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3 + E_4))$;

5) n–листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/(\exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3)\exp(\mathbb{Z}E_4)) \cong A_n \times \mathbb{T}$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/(\exp(\mathbb{Z}E_3)\exp(\mathbb{Z}E_4)) \cong SO_0(2,1) \times \mathbb{T}$;

6) n^2–листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/(\exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3 + \alpha E_4))\exp(n\mathbb{Z}E_4))$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R})/(\exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3 + \alpha E_4))\exp(\mathbb{Z}E_4))$.

Теорема 1.

Пусть задан базис

$$e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4 - E_3, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3$$

алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{g}_1$, $D_1(e) = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$ и на $D_1(e)$ задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Тогда левоинвариантное распределение D_1 на связной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вполне неголономно, и пара $(D_1(\mathrm{Id}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_1 на G. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G, d_1), удовлетворяющая условию $\gamma_1(0) = \mathrm{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — некоторые вещественные постоянные, причем

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Теорема 2.

Пусть задан базис

$$e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3$$

алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{g}_1$, $D_2(\mathrm{Id}) = \mathrm{span}(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ и на $D_2(\mathrm{Id})$ задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Тогда левоинвариантное распределение D_2 на группе Ли G вполне неголономно, и пара $(D_2(\mathrm{Id}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_2 на G. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_2 = \gamma_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G, d_2), удовлетворяющая условию $\gamma_2(0) = \mathrm{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — некоторые постоянные, причем

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Предложение 1.

Пусть $\gamma_i(t) = \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в (G, d_i), $i = 1, 2$. Для любых $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ и для каждого $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_2; t) \exp(t\alpha_2 e_4).$$

Предложение 2.

Для любых $\beta, t \in \mathbb{R}$, $\gamma_i(0, \pm 1, 0, \beta; t) = \exp(\pm t e_2)$, $i = 1, 2$. Каждая из этих двух однопараметрических подгрупп — нестрого анормальная экстремаль субриманова пространства (G, d_i).

Предложение 3.

Для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_i(t_0)^{-1}\gamma_i(t)$

$$= \gamma_i(\alpha_1 \cos \beta t_0 + \alpha_3 \sin \beta t_0, \alpha_2, -\alpha_1 \sin \beta t_0 + \alpha_3 \cos \beta t_0, \beta; t - t_0).$$

$\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$

$\mathrm{SU}(1,1)$ есть группа Ли комплексных матриц второго порядка с определителем 1, сохраняющих индефинитную эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ в $\mathbb{C}^2$:

$$SU(1,1) = \left\{ (A, B) := \begin{pmatrix} \frac{A}{B} & \frac{B}{A} \end{pmatrix} \mid A,\, B \in \mathbb{C},\ |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(1,1)$ группы Ли $\mathrm{SU}(1,1)$ есть

$$\mathfrak{su}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} iX & Y \\ \overline{Y} & -iX \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R},\, Y \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1).$$

Рассмотрим тривиальное абелево расширение $\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$

$$= \left\{ (A,B,v) := \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ \overline{B} & \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix} \,\middle|\, A,\ B\in\mathbb{C},\ |A|^2-|B|^2=1;\ v\in\mathbb{R} \right\}.$$

Ее алгебра Ли $\mathfrak{su}(1,1)\oplus\mathbb{R}$ имеет базис E_1,E_2,E_3,E_4:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 & 0 \\ -i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$[E_1,E_2]=-E_3,\ [E_2,E_3]=E_1,\ [E_3,E_1]=E_2,\ [E_i,E_4]=0,\ i=1,2,3.$$

Теорема 3.

Пусть

$$m_2 = t/2,\ n_2 = 1, \quad \text{если} \quad \beta^2 = 1 - \alpha_2^2,$$

$$m_2 = \frac{\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}},\ n_2 = \operatorname{ch}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}, \quad \text{если} \quad \beta^2 < 1 - \alpha_2^2,$$

$$m_2 = \frac{\sin\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}},\ n_2 = \cos\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}, \quad \text{если} \quad \beta^2 > 1 - \alpha_2^2.$$

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$,

$$A = \left(n_2 \cos\frac{\beta t}{2} + \beta m_2 \sin\frac{\beta t}{2}\right) + \left(n_2 \sin\frac{\beta t}{2} - \beta m_2 \cos\frac{\beta t}{2}\right) i,$$

$$B = m_2\sqrt{1-\alpha_2^2}\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) i\right], \quad v = \alpha_2 t,$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}, \quad \sin\varphi_0 = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}.$$

При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = (e, \alpha_2 t)$, e — единичная матрица.

Теорема 4.

Пусть

$$m_1 = t/2, \quad n_1 = 1, \quad \text{если} \quad (\alpha_2+\beta)^2 = 1-\alpha_2^2,$$

$$m_1 = \frac{\operatorname{sh}\frac{\mathrm{t}\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}{2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}, \quad n_1 = \operatorname{ch}\frac{\mathrm{t}\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}{2},$$

если $(\alpha_2+\beta)^2 < 1-\alpha_2^2$,

$$m_1 = \frac{\sin\frac{t\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}{2}}{\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}, \quad n_1 = \cos\frac{t\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}{2},$$

если $(\alpha_2+\beta)^2 > 1-\alpha_2^2$.

Теорема 4.

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$ субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, \mathrm{d}_1)$ задается формулами

$$A = \left(n_1 \cos \frac{\beta t}{2} + (\alpha_2 + \beta) m_1 \sin \frac{\beta t}{2} \right) + \left(n_1 \sin \frac{\beta t}{2} - (\alpha_2 + \beta) m_1 \cos \frac{\beta t}{2} \right) i,$$

$$B = m_1 \sqrt{1 - \alpha_2^2} \left[\cos \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) - \sin \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) i \right], \quad v = \alpha_2 t,$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}, \quad \sin \varphi_0 = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}.$$

При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = (A, B, v)(t)$ задается формулами

$$A = e^{-i(\alpha_2 t/2)}, \quad B \equiv 0, \quad v = \alpha_2 t.$$

Множество разреза и первая каустика в $\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$

Множество разреза (для точки Id) субриманова пространства (G, d_i) — множество Cut_i всех концов $g \in G$ непродолжаемых за g кратчайших, соединяющих Id с точкой g.

Пусть $C := S^2 \times \mathbb{R}$ — множество семейства параметров $\lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ геодезической $\gamma_i(t)$ в (G, d_i).
Рассмотрим экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp}_i : C \times \mathbb{R}_+ \to G$:

$$\mathrm{Exp}_i(\lambda; t) := \gamma_i(\lambda; t), \;\; i = 1, 2.$$

Момент времени $\widehat{t} > 0$ — сопряженное время для геодезической $\gamma_i(\lambda; t)$ в (G, d_i), если $(\lambda, \widehat{t})$ есть критическая точка экспоненциального отображения, т.е. дифференциал

$$(\mathrm{Exp}_i)_{*(\lambda,\widehat{t})} : T_{(\lambda,\widehat{t})}(C \times \mathbb{R}_+) \to T_{\widehat{g}_i} G, \quad \text{где } \widehat{g}_i = \mathrm{Exp}_i(\lambda, \widehat{t}),$$

вырожден. Первое сопряженное время вдоль геодезической $\gamma_i(t)$ есть

$$t^1_{\mathrm{conj}} = \inf\{t > 0 \mid \; t - \text{сопряженное время вдоль } \gamma_i(\cdot)\}.$$

Если $t^1_{\mathrm{conj}} > 0$, то $\gamma_i(t^1_{\mathrm{conj}})$ называется первой сопряженной точкой.

$t^1_{\text{conj}} = 0$ вдоль нестрого анормальной экстремали $\gamma_i(t) = \exp(\pm t e_2)$.
Первая каустика субриманова пространства (G, d_i) — множество Conj^1_i всех первых сопряженных точек геодезических $\gamma_i(t)$ с началом $\gamma_i(0) = \mathrm{Id}$.

Предложение 4.

Пусть

$$w_1 = \sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad w_2 = \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}.$$

Момент времени $\widehat{t} > 0$ — сопряженное время вдоль геодезической $\tilde{\gamma}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, тогда и только тогда, когда $w_i > 0$ и

$$\sin \frac{w_i \widehat{t}}{2} \left(\sin \frac{w_i \widehat{t}}{2} - \frac{w_i \widehat{t}}{2} \cos \frac{w_i \widehat{t}}{2} \right) = 0.$$

Следствие 1.

1. В случае $\alpha_2 = \pm 1$ или $\alpha_2 \neq \pm 1$, $w_i^2 \leq 0$ геодезические $\tilde{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$ субримановa пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$ не содержат сопряженных точек.

2. n–ое сопряженное время t^n_{conj} вдоль геодезической $\tilde{\gamma}_i(t)$, где $\alpha_2 \neq \pm 1$ и $w_i > 0$, в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, имеет вид

$$t^{2m-1}_{\mathrm{conj}} = \frac{2\pi m}{w_i}, \quad t^{2m}_{\mathrm{conj}} = \frac{2x_m}{w_i}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\mathrm{tg} x = x$.

3. Первая каустика $\mathrm{Conj}^1_{\mathrm{i}}$ пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$ имеет вид

$$\mathrm{Conj}^1_i = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \,|\, |A| = 1,\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

Предложение 5.

1. При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_i(t) = \exp(t\alpha_2 e_2)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$ — метрическая прямая, т.е. для любых $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ отрезок $\tilde{\gamma}_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая.

2. Геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, -\alpha_2; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$ — метрическая прямая.

3. Геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, 0; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$ — метрическая прямая.

Предложение 6.

Множество разреза Cut_2 в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$, соответствующее Id, есть $\mathrm{Cut}_2 = \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, где

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid A \neq 1,\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid \mathrm{Re}(A) < -1,\ \mathrm{Im}(A) = 0,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

Предложение 7.

Пусть $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$. Тогда $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Верно и обратное.

Предложение 8.

Множество разреза Cut_1 в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, соответствующее Id, есть $\mathrm{Cut}_1 = \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$, где

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid A \neq e^{-iv/2},\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid B \neq 0,\ \pi - v/2 \in \mathrm{Arg}(A),\ v \in \mathbb{R}\},$$

где $\mathrm{Arg}(A)$ — множество всех значений аргумента комплексного числа A.

Теорема 5. Непродолжаемые кратчайшие в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},\mathrm{d}_2)$

Пусть $\alpha_2\neq\pm1$, $\beta\neq0$ и $\tilde\gamma_2(t)=\tilde\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)$, $0\le t\le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_2)$. Тогда

1. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$.
2. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}=1$, то $T\in\left(\frac{2\pi}{|\beta|},\frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ и T удовлетворяет системе

$$\cos\frac{\beta T}{2}=\frac{-2}{\sqrt{4+\beta^2T^2}},\quad \sin\frac{\beta T}{2}=\frac{-\beta T}{\sqrt{4+\beta^2T^2}}.$$

3. Если $0<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<1$, то $T\in\left(\frac{2\pi}{|\beta|},\frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ и T удовлетворяет системе

$$\cos kx=\frac{-1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{th}^2x}},\quad \sin kx=\frac{-k\mathrm{th}x}{\sqrt{1+k^2\mathrm{th}^2x}},$$

где k и x определены формулами

$$k=\frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}>1,\ \ x=\frac{T\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}.$$

Теорема 5. Непродолжаемые кратчайшие в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},\mathrm{d}_2)$

4. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $T=\frac{3\pi}{|\beta|}$.

5. Если $\frac{3}{2\sqrt{2}}<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{2}{\sqrt{3}}$, то $\frac{3\pi}{|\beta|}<T<\frac{2\pi\left(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\right)}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{4\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx=\frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2x}},\quad \sin kx=\frac{k\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2x}}<0,$$

где k и x определены формулами п. 3.

6. Если $1<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\frac{2\pi}{|\beta|}<\frac{2\pi\left(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\right)}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<T<\frac{3\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx=\frac{-1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2x}},\quad \sin kx=\frac{-k\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+k^2\mathrm{tg}^2x}}<0,$$

где k и x определены формулами п. 3.

Если $\tilde{\gamma}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, то T удовлетворяет пп. 1–6 теоремы 5 после замены β на $\beta + \alpha_2$.

Теорема 6.

Пусть $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ — связная $(n+1)$–мерная группа Ли (с единицей $\mathrm{Id} = (\mathrm{e}, 1)$ и алгеброй Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_1$) с левоинвариантной субримановой метрикой d, порожденной вполне неголономным распределением D с

$$D(\mathrm{Id}) = \mathrm{span}(\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_{n-1}}, \mathrm{e_{n+1}}) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_1,$$

$$e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathfrak{g},\ e_{n+1} = 1 \in \mathfrak{g}_1,$$

и заданным на $D(\mathrm{Id})$ скалярным произведением с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}$. Тогда для любого $(g, e^v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$

$$d^2(\mathrm{Id}, (g, e^v)) = v^2 + d^2(\mathrm{Id}, (g, 1)).$$

Следствие 2.

Для любого $(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$ выполнено

$$d_2^2(\mathrm{Id}, (A, B, v)) = v^2 + d_2^2(\mathrm{Id}, (A, B, 0)).$$

Предложение 9.

Для любого $(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$

$$d_1(\mathrm{Id}, (A, B, v)) = d_2(\mathrm{Id}, (Ae^{iv/2}, Be^{-iv/2}, v)).$$

Группа Ли $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$

Пространство-время Минковского $\mathrm{Mink}^{\mathrm{n+1}}$, $n\geq 1$, — векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с псевдоскалярным произведением $\{(t,x),(s,y)\} := -ts + (x,y)$. Здесь $(x,y) = xy^T$ — стандартное скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Группа Лоренца $\mathrm{SO}_0(n,1)$ — компонента связности единицы группы $P(n,1)$ всех линейных псевдоизометрических, т.е. сохраняющих псевдоскалярное произведение $\{\cdot,\cdot\}$, преобразований пространства $\mathrm{Mink}^{\mathrm{n+1}}$. Группа Ли $\mathrm{SO}_0(n,1)$ состоит из тех элементов группы $P(n,1)$, которые одновременно сохраняют и направление времени, и ориентацию пространства $E^{n,1}$.

$$\mathrm{SO}_0(2,1) = \left\{g\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})\,\middle|\,\mathrm{g^TJg = J,\ \ J = diag(-1,1,1),\ \ detg = 1,\ \ g_{11} > 0}\right\}$$

Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{SO}_0(n,1)$ есть

$$\mathfrak{so}(2,1) = \left\{A\in\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})\,\middle|\,A^TJ + JA = 0\right\}.$$

Рассмотрим тривиальное абелево расширение $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$

$$\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}=\left\{(C,v):=\begin{pmatrix} C & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & e^v\end{pmatrix}\ \mid C\in\mathrm{SO}_0(2,1),\ v\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ее алгебра Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$ имеет базис E_1,E_2,E_3,E_4:

$$E_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$[E_1,E_2]=-E_3,\ [E_2,E_3]=E_1,\ [E_3,E_1]=E_2,\ [E_i,E_4]=0,\ i=1,2,3.$$

Обозначим ρ_i, $i = 1, 2$, — левоинвариантная субриманова метрика на $\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$ (с единицей Id), задаваемая вполне неголономным левоинвариантным распределением Δ_i с $\Delta_i(\mathrm{Id}) = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$, где векторы e_1, e_2, e_3, e_4 заданы формулами

$$i = 1: \qquad e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4 - E_3, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3;$$

$$i = 2: \qquad e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3.$$

На $\Delta_i(\mathrm{Id})$ определено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, относительно которого векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис.

Теорема 7.

Пусть

$$\mu_2 = t, \quad \nu_2 = t^2/2, \quad \text{если } \beta^2 = 1 - \alpha_2^2,$$

$$\mu_2 = \frac{\sin(t\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}, \quad \nu_2 = \frac{1 - \cos(t\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1},$$

если $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$,

$$\mu_2 = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{t}\sqrt{1 - \beta^2 - \alpha_2^2})}{\sqrt{1 - \beta^2 - \alpha_2^2}}, \quad \nu_2 = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{t}\sqrt{1 - \beta^2 - \alpha_2^2}) - 1}{1 - \beta^2 - \alpha_2^2},$$

если $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$.

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$ равна $\gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (C, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $v(t) = \alpha_2 t$ и столбцы $C_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, матрицы $C(t) \in \mathrm{SO}_0(2,1)$ даны формулами

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1+\nu_2(1-\alpha_2^2) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\cos\varphi_0 - \beta\nu_2\sin\varphi_0) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\sin\varphi_0 + \beta\nu_2\cos\varphi_0) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\cos(\beta t+\varphi_0) + \beta\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-\beta^2\nu_2)\cos\beta t + \beta\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ -(1-\beta^2\nu_2)\sin\beta t + \beta\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\sin(\beta t+\varphi_0) - \beta\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-\beta^2\nu_2)\sin\beta t - \beta\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ (1-\beta^2\nu_2)\cos\beta t + \beta\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\sin\varphi_0, \quad \alpha_3 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\cos\varphi_0.$$

При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}, \rho_2)$ равна $\gamma_2(t) = (E, v)(t)$, $t\in\mathbb{R}$, где E — единичная квадратная матрица третьего порядка, $v(t) = \alpha_2 t$.

Теорема 8.

Пусть

$$\mu_1 = t, \quad \nu_1 = t^2/2, \quad \text{если } (\beta+\alpha_2)^2 = 1-\alpha_2^2,$$

$$\mu_1 = \frac{\sin(t\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1})}{\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1}}, \quad \nu_1 = \frac{1-\cos(t\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1})}{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1},$$

если $(\beta+\alpha_2)^2 > 1-\alpha_2^2$,

$$\mu_1 = \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{t}\sqrt{1-(\beta+\alpha_2)^2-\alpha_2^2})}{\sqrt{1-(\beta+\alpha_2)^2-\alpha_2^2}}, \quad \nu_1 = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{t}\sqrt{1-(\beta+\alpha_2)^2-\alpha_2^2})-1}{1-(\beta+\alpha_2)^2-\alpha_2^2},$$

если $(\beta+\alpha_2)^2 < 1-\alpha_2^2$,

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}, \rho_2)$ равна $\gamma_2(t) = (C, v)(t)$, $t\in\mathbb{R}$, где $v(t) = \alpha_2 t$ и столбцы $C_j(t)$, $j=1,2,3$, матрицы $C(t)\in\mathrm{SO}_0(2,1)$ даны формулами

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1+\nu_2(1-\alpha_2^2) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\cos\varphi_0 - \beta\nu_2\sin\varphi_0) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\sin\varphi_0 + \beta\nu_2\cos\varphi_0) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\cos(\beta t+\varphi_0) + (\beta+\alpha_2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\cos\beta t + (\beta+\alpha_2)\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ -(1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\sin\beta t + (\beta+\alpha_2)\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}\,(\mu_2\sin(\beta t+\varphi_0) - (\beta+\alpha_2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\sin\beta t - (\beta+\alpha_2)\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\cos\beta t + (\beta+\alpha_2)\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\sin\varphi_0, \quad \alpha_3 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\cos\varphi_0.$$

При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}, \rho_2)$ равна $\gamma_2(t) = (C, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $v(t) = \alpha_2 t$,

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 t & -\sin\alpha_2 t \\ 0 & \sin\alpha_2 t & \cos\alpha_2 t \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{SU}(1,1)$ — односвязная накрывающая группы Ли $\mathrm{SO}_0(2,1)$; двулистное накрытие $\Pi : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SO}_0(2,1)$ можно задать так:

$$\Pi(A,B) = \begin{pmatrix} A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2 & 2(A_1B_2-A_2B_1) & 2(A_1B_1+A_2B_2) \\ 2(A_1B_2+A_2B_1) & A_1^2-A_2^2-B_1^2+B_2^2 & 2(A_1A_2+B_1B_2) \\ 2(A_1B_1-A_2B_2) & 2(B_1B_2-A_1A_2) & A_1^2-A_2^2+B_1^2-B_2^2 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \mathrm{Re}(A), \quad A_2 = \mathrm{Im}(A), \quad B_1 = \mathrm{Re}(B), \quad B_2 = \mathrm{Im}(B).$$

Тогда отображение

$$\tilde{\Pi} : \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \to \mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \quad \tilde{\Pi}(A,B,v) = (\Pi(A,B),v),$$

есть двулистное накрытие группы Ли $\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$ группой Ли $\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}$.
Дифференциал $d\tilde{\Pi}(\mathrm{Id})$ — изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}(1,1) \oplus \mathbb{R}$ и $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$, переводящий базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $\mathfrak{su}(1,1) \oplus \mathbb{R}$ в одноименный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$. В силу теорем 1, 2, $\tilde{\Pi} : (\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i) \to (\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$ — локальная изометрия, и для любых $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{S}^2$, $\beta, t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)) = \gamma_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t), \quad i = 1,2.$$

Предложение 10.

Пусть

$$w_1 = \sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}, \quad w_2 = \sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}.$$

1. При $\alpha_2 = \pm 1$ или $\alpha_2 \neq \pm 1$, $w_i^2 \leq 0$ геодезические $\tilde{\gamma}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$ субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$ не содержат сопряженных точек.

2. n–ое сопряженное время t^n_{conj} вдоль геодезической $\tilde{\gamma}_i(t)$, где $\alpha_2 \neq \pm 1$ и $w_i > 0$, в $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, имеет вид

$$t^{2m-1}_{\mathrm{conj}} = 2\pi m / w_i, \quad t^{2m}_{\mathrm{conj}} = 2x_m / w_i, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\mathrm{tg} x = x$.

3. Первая каустика Conj^1_i субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\mathrm{Conj}^1_i = \left\{ (C, v) \;\middle|\; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, \ \psi \in (0, 2\pi), \ v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Предложение 11.

1. При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_i(t) = \exp(t\alpha_2 e_2)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, d_i)$ — метрическая прямая, т.е. для любых $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ отрезок $\tilde{\gamma}_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая.

2. Геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, -\alpha_2; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, d_1)$ — метрическая прямая.

3. Геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, 0; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, d_2)$ — метрическая прямая.

Предложение 12.

Множество разреза Cut_2 в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, соответствующее Id, есть $\mathrm{Cut}_2=\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}\cup\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, где

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}=\{\tilde{\Pi}(A,0,v)\mid (A,0,v)\in\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},\ A\neq\pm1,\ B=0,\ v\in\mathbb{R}\}$$

$$=\left\{(C,v)\in\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}\,\middle|\,C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\ \psi\in(0,2\pi),\ v\in\mathbb{R}\right\},$$

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}=\{\tilde{\Pi}(A,B,v)\mid (A,B,v)\in\mathrm{SU}(1,1),\ \mathrm{Re}(A)=0,\ B\neq0,\ v\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{(C,v)\in\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}\mid c_{21}=-c_{12},\ c_{31}=-c_{13},$$

$$c_{23}=c_{32},\ c_{22}+c_{33}<-2,\ v\in\mathbb{R}\}.$$

Предложение 13.

Множество разреза Cut_2 в $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, соответствующее Id, есть $\mathrm{Cut}_2 = \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, где

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}} = \left\{ (C, v) \mid C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},\ v \in \mathbb{R},\ \psi \neq v + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}} = \left\{ (C^*, v) \mid C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cos v + c_{13}\sin v & c_{13}\cos v - c_{12}\sin v \\ c_{21} & c_{22}\cos v + c_{23}\sin v & c_{23}\cos v - c_{22}\sin v \\ c_{31} & c_{32}\cos v + c_{33}\sin v & c_{33}\cos v - c_{32}\sin v \end{pmatrix}, \right.$$

$$C = (c_{ij}) \in SO_0(2,1),\ c_{21} = -c_{12},\ c_{31} = -c_{13},$$

$$\left. c_{23} = c_{32},\ c_{22} + c_{33} < -2,\ v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Теорема 9. Непродолжаемые кратчайшие в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$

Пусть $\alpha_2\neq\pm1$, $\beta\neq0$ и $\gamma_2(t)=\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)$, $0\le t\le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$. Тогда

1. Если $0<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<1$, то $T\in\left(\frac{\pi}{|\beta|},\frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos\frac{|\beta|T}{2}=-\frac{|\beta|\mathrm{sh}(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)}{\sqrt{(1-\alpha_2^2)\mathrm{ch}^2(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)-\beta^2}},$$

$$\sin\frac{|\beta|T}{2}=\frac{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}\mathrm{ch}(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)}{\sqrt{(1-\alpha_2^2)\mathrm{ch}^2(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)-\beta^2}}.$$

2. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}=1$, то $T\in\left(\frac{\pi}{|\beta|},\frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos\frac{\beta T}{2}=-\frac{\beta T/2}{\sqrt{1+\beta^2T^2/4}},\quad \sin\frac{\beta T}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2T^2/4}}.$$

3. Если $1 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T \in \left(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos\frac{|\beta|T}{2} = -\frac{|\beta|\sin(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-(1-\alpha_2^2)\cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}},$$

$$\sin\frac{|\beta|T}{2} = \frac{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}\cos(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-(1-\alpha_2^2)\cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}}.$$

4. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$.

5. Если $\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ и удовлетворяет системе уравнений

$$\cos\frac{|\beta|T}{2} = -\frac{|\beta|\sin(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-(1-\alpha_2^2)\cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}},$$

$$\sin\frac{|\beta|T}{2} = \frac{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}\cos(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2-(1-\alpha_2^2)\cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}}.$$

6. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$.

Предложение 14.

Для любого $(C, v) \in \mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_1(\mathrm{Id}, (C, v)) = \rho_2(\mathrm{Id}, (\tilde{C}, v)),$$

$$\tilde{C} = \left(\begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} \cos v - c_{13} \sin v & c_{13} \cos v + c_{12} \sin v \\ c_{21} & c_{22} \cos v - c_{23} \sin v & c_{23} \cos v + c_{22} \sin v \\ c_{31} & c_{32} \cos v - c_{33} \sin v & c_{33} \cos v + c_{32} \sin v \end{array} \right).$$

Предложение 15.

Для любого $(C, v) \in \mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_2^2(\mathrm{Id}, (C, v)) = v^2 + \rho_2^2(\mathrm{Id}, (C, 0)).$$

БОЛЬШОЕ СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!