Пространства максимальных идеалов инвариантных алгебр функций на однородных пространствах компактных групп Ли

Гичев В.М.

Пусть M — однородное пространство компактной связной группы Ли G и A — замкнутая G-инвариантная подалгебра банаховой алгебры $C(M)$ всех непрерывных функций на M. Предполагается, что A содержит все постоянные функции. Как и у всякой коммутативной банаховой алгебры, каждый максимальный идеал A имеет коразмерность 1 и замкнут. Множество $\mathcal{M}_A = \mathrm{Hom}\,(A, \mathbb{C})$ называют пространством максимальных идеалов A или спектром A. В докладе будет рассматриваться задача описания пространств максимальных идеалов инвариантных алгебр. Если $G \subseteq \mathrm{U}(n)$, M — одна из орбит G в $\mathbb{C}^n$, а алгебра A представляет собой замыкание в $C(M)$ пространства $\mathcal{P}$ всех голоморфных полиномов, то вопрос сводится к построению полиномиально выпуклой оболочки M, то есть множества

$$\widehat{M} = \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| \leqslant \|p\|_M \text{ для всех } p \in \mathcal{P}\},$$

где $\|p\|_M = \max_{x \in M} |p(x)|$.

Алгебра A содержит наибольший собственный G-инвариантный идеал $\mathcal{J}$. Он замкнут. Определим два класса инвариантных алгебр в соответствии с крайними ситуациями для $\mathcal{J}$:

$\mathfrak{A}$: $\operatorname{codim} \mathcal{J} = 1$,

$\mathfrak{B}$: $\mathcal{J} = 0$.

Если $A \in \mathfrak{A}$, то G имеет неподвижную точку в $\mathcal{M}_A$. У алгебр класса $\mathfrak{B}$ нет собственных инвариантных идеалов. Алгебры из этих классов существенно различаются, а из них можно составить $\mathcal{M}_A$ в общем случае. Положим $B = A/\mathcal{J}$, $C = \mathcal{J} + \mathbb{C}$. Тогда $C \in \mathfrak{A}$, у B нет собственных инвариантных идеалов, а $\mathcal{M}_A$ разбивается на две части, одна из которых изоморфна $\mathcal{M}_B$, а вторая — $\mathcal{M}_C$ с выброшенной неподвижной точкой. Таким образом, возможный путь к решению задачи состоит в изучении алгебр из классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и способа склейки $\mathcal{M}_B$ с $\mathcal{M}_C \setminus \{\mathcal{J}\}$.

Подробное описание $\mathcal{M}_A$ пока есть лишь для алгебр на однородных пространствах вида $G \times G/G$ (см. [1]). В этом случае в $\mathcal{M}_A$ имеется естественная структура полугруппы с инволюцией, а также аналитическая структура. Из результатов [1] можно извлечь следующий критерий: $A \in \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда A антисимметрична (последнее означает, что все вещественные функции из A постоянны).

В работе [2] рассматривались инвариантные алгебры на коммутативных однородных пространствах. Одно из определений таких пространств состоит в том, что сверточная алгебра интегрируемых на $M = G/K$ функций, постоянных слева и справа по K, коммутативна. В ней приведенный выше критерий включения $A \in \mathfrak{A}$ распространен на этот класс однородных пространств. В [2] есть и критерий включения $A \in \mathfrak{B}$: это так в том и только в том случае, когда A выдерживает комплексное сопряжение.

В статье [3] показано, что орбита M связной компактной линейной группы полиномиально выпукла тогда и только тогда, когда ее комплексификация $M^{\mathbb{C}}$ замкнута и M является ее вещественной формой.

Об алгебрах класса $\mathfrak{B}$ пока известно не очень много, однако есть примеры, показывающие, что они связаны с известными объектами комплексной геометрии.

Список литературы

[1] Gichev V. M., “Maximal Ideal Spaces of Invariant Function Algebras on Compact Groups”, Sib. Adv. in Math. 33:2 (2023), 107-139.

[2] Gichev V. M., “Invariant Function Algebras on Compact Commutative Homogeneous Spaces”, Mosc. Math. J. 8:4 (2008), 697–709.

[3] Gichev V. M., Latypov I. A., “Polynomially convex orbits of compact Lie groups”, Transform. Groups, 6:4 (2001), 321-331.