Проблема вхождения в рациональные подмножества нильпотентных групп[1]

В.А. Романьков

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)

Доклад содержит несколько результатов о разрешимости проблемы вхождения в рациональные множества нильпотентных групп и их естественные подмножества, полученные автором за последние два года.

Понятие рационального множества является естественным обобщением понятия регулярного множества, одного из основных в теории информационных систем.

По определению семейство рациональных множеств $\mathrm{Rat}(G)$ группы G является наименьшим семейством, содержащим все конечные подмножества и замкнутым относительно рациональных операций

- объединения: $R_1, R_2 \in \mathrm{Rat}(G) \Rightarrow R_1 \cup R_2 \in \mathrm{Rat}(G)$;
- умножения: $R_1, R_2 \in \mathrm{Rat}(G) \Rightarrow R_1 \cdot R_2 = \{r_1 r_2 : r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\} \in \mathrm{Rat}(G)$;
- порождения подмоноида: $R \in \mathrm{Rat}(G) \Rightarrow R^* = \cup_{i=1}^{\infty} R^i \cup \{1\} \in \mathrm{Rat}(G)$.

Примерами рациональных множеств являются конечно порожденные (и только конечно порожденные) подгруппы и конечно порожденные подмоноиды. В общем случае семейство $\mathrm{Rat}(G)$ не замкнуто относительно операций пересечения и дополнения. Общие сведения о рациональных множествах групп можно найти в статье [R. H. Gilman, "Formal Languages and Infinite Groups, Geometric and computational perspectives on infinite groups", In: DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 25, Providence, 1996, 27–51] и монографии автора [В. А. Романьков, "Рациональные подмножества в группах". ОмГУ, Омск, 2014, 176 с.].

Представим некоторые ранее известные результаты.

Положительные результаты:

- M. Benois, 1969. Проблема вхождения в рациональные подмножества разрешима в свободных группах.
- S. Eilenberg, M.P. Schutzenberger, 1969 (независимое доказательство – М.Ю. Недбай, 1999). Проблема вхождения в рациональные подмножества разрешима в абелевых группах.
- Z. Grunschlag, 1999. Разрешимость проблемы вхождения в рациональные подмножества сохраняется при конечных расширениях групп.
- М. Ю. Недбай, 2000. Разрешимость проблемы вхождения в рациональные подмножества сохраняется при свободных произведениях групп.

Отрицательные результаты:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-11-00075)

- В. А. Романьков, 1999. Для любого $l \geq 2$ и достаточно большого r в свободной нильпотентной группе $N_{r,l}$ ранга r ступени l неразрешима проблема вхождения в рациональные подмножества. Доказательство основывается на неразрешимости 10-й проблемы Гильберта

- M. Lohrey, B. Steinberg, 2011. Свободная метабелева группа M_r ранга $r \geq 2$ содержит конечно порожденный подмоноид с неразрешимой проблемой вхождения. Доказательство основывается на неразрешимости проблемы комбинаторного замощения.

Относительно других многочисленных результатов по проблеме вхождения в рациональные подмножества групп см. обзор * [M. Lohrey, "The rational subset membership problem for groups: a survey", In: Groups St Andrews 2013, Edited by C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal, Publisher: Cambridge University Press, 2015, 368–389].

Основные представляемые результаты.

- Для любого $l \geq 3$ существует конечно порожденный подмоноид M свободной нильпотентной группы $N_{r,l}$ достаточно большого ранга r, проблема вхождения в который алгоритмически неразрешима.

  – Решение известной проблемы М. Лори и Б. Стейнберга, явно сформулированной как проблема 24 из обзора М. Лори *. Опубликовано [В.А. Романьков, Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени $l \geq 2$ достаточно большого ранга. Известия РАН. Серия математическая. Том 87, №4 (2023), 166-185].

- Для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ прямая степень $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^n$ группы Гейзенберга $\mathbb{H}$ содержит конечно порожденный подмоноид M, проблема вхождения в который неразрешима.

  – Ответ на вопрос из статьи [T. Colcombet, J. Ouaknine, P. Semukhin, J. Worrell, *On reachability problems for low dimensional matrix semigroups* In: C. Baier (ed.) et al., *46th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2019)*, LIPIcs, **132**, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, Dagstuhl, Germany, 2019, 44:1–44:15]. Опубликовано [V.A. Roman'kov, Undecidability of the submonoid membership problem for a sufficiently large finite direct power of the Heisenberg group. Сибирские Электронные Математические Известия, Том 20:1 (2023), 293-305].

- Для любой конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2 проблема вхождения в произведение двух подгрупп разрешима. Существует конечно порожденная нильпотентная группа ступени 2 и произведение 4-х ее подгрупп, проблема вхождения в которое неразрешима.

  – Ответ на устный вопрос Э. Вентуры. Направлено для опубликования [Vitaly Roman'kov, On decidability of the product of subgroups membership problem for nilpotent groups. Journal of Group Theory].

О доказательствах. Результаты о неразрешимости получены через интерпретацию диофантовых уравнений и неразрешимость 10-й проблемы Гильберта.

О связях. Проблема вхождения в подмоноид является обобщением одной из классических задач линейного программирования. См. монографию [F. Bassino, I. Kapovich, M. Lohrey, A. Miasnikov, A. Nicaud, A. Nikolaev, I. Rivin, V. Shpilrain, A. Ushakov, P. Weil, "Complexity and Randomness in Group Theory: GAGTA BOOK 1". Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2020, 386 p.]. Случай нильпотентных групп рассматривается как наиболее интересный, так как нильпотентные группы в определенном смысле близки к абелевым.

Проблема вхождения в произведение двух подгрупп равносильна проблеме непустоты пересечения двух смежных классов по различным подгруппам. Такие пересечения играют существенную роль в решениях проблемы изоморфизма графов, предложенных в знаменитых работах Л. Бабаи (L. Babai) и Ю. Люкса (Y. Lux).